

Friedberg-Muchnik の定理と有限害優先論法

y. (@waidotto)

例によっていつも通り決定不能問題 (undecidable problem) について考えましょう。決定不能問題とは、コンピュータープログラムによって解くことのできない計算課題のことです。決定不能問題についての概要は例えば第 10 回つどいのスライド [4], 第 3 回関東つどいのスライド [5], 決定不能問題ギャラリー [6] などをご覧ください。

今回の講演では次の **Post** の問題について話します。

問題 (Post の問題 (Post's problem)*¹). $\emptyset <_T A <_T K$ なる c.e. 集合 A は存在するか？

上の問題の定義に現れる用語・記号について少し説明します。以下、変数 x, y, \dots などは $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ の元を動かとします。まず、個々のプログラムは有限長の文字列を用いて表されるので、プログラムの全体は可算集合です。そこでプログラム全体を一行に並べて、 e 番目のプログラムによって計算される ω から ω への計算可能な部分関数を φ_e と書くことにします。

入力 $x \in \omega$ に対する φ_e の計算が停止することを $\varphi_e(x) \downarrow$ と書き、さらにそれが $s \in \omega$ ステップ以内に停止することを $\varphi_{e,s}(e) \downarrow$ と書きます。この記法を用いると、プログラムの停止問題 K は例えば $K = \{e \in \omega \mid \varphi_e(e) \downarrow\}$ のように書くことができます。

計算可能な述語 $R(x, y)$ を用いて $A = \{x \in \omega \mid \exists y \in \omega [R(x, y)]\}$ と書ける集合 A は再帰的枚挙可能集合 (computably enumerable set) または略して **c.e. 集合** (c.e. set) と呼ばれます。各 $s \in \omega$ に対して $\varphi_{e,s}(e) \downarrow$ かどうかは計算可能なので $K = \{e \in \omega \mid \exists s \in \omega [\varphi_{e,s}(e) \downarrow]\}$ と書くことができ、よって K は c.e. 集合です。

集合 $A \subseteq \omega$ に対して、 A の特性関数 $\chi_A: \omega \rightarrow \{0, 1\}$ を $\chi_A(x) = 1 \iff x \in A$ で定義します。集合 $A, B \subseteq \omega$ に対して、「 χ_B を用いたプログラムによって χ_A が計算できる」ということを $A \leq_T B$ で表します。これは各自然数が B に属するかどうかを知っていればある自然数が A が属するかどうかを計算できるということですから、感覚的には「 A より B の方が多くの情報を持っている」と解釈できます。 $A \leq_T B$ かつ $B \not\leq_T A$ であることを $A <_T B$ で表します。 A が決定可能ならどんな B についても $A \leq_T B$ が成り立ちます。 A が決定不能であることは $\emptyset <_T A$ と同値です。

停止問題 K は決定不能なので $\emptyset <_T K$ です。また、任意の c.e. 集合 A に対し $\emptyset \leq_T A \leq_T K$ が成り立つことが示せます。したがって Post の問題は次の問いと同値です: 「それ自体は決定不能問題であるが、その決定不能性を『仮に決定可能だとすると K が決定可能となり矛盾する』という方法によっては証明できないような決定問題は存在するだろうか？」

R. M. Friedberg (1957) と A. A. Muchnik (1956) は有限害優先論法 (finite injury priority method) と呼ばれる手法を用いて、Post の問題を独立に解決しました。本講演では、この Friedberg-Muchnik の定理の証明をなるべくわかりやすく解説することを試みます。

前提知識は (原理的には) 不要ですが、“計算可能である”ということに対する適切な感覚を持っていることが望ましいです。

参考文献

- [1] M. Sipser (太田和夫・田中圭介 監訳, 阿部正幸・植田広樹・藤岡淳・渡辺治 訳), 計算理論の基礎 [原著第 2 版] 2. 計算可能性の理論, 共立出版, 2008.
- [2] R. I. Soare, *Turing Computability: theory Theory and Applications*, Springer, 2016.
- [3] S. B. Cooper, *Computability Theory*, CRC Press, 2004.
- [4] y., 決定不能問題の話, 第 10 回関西すうがく徒のつどい, 2017, <http://iso.2022.jp/math/tsudoi/10/slide.pdf>.
- [5] y., 2018 年の決定不能問題ギャラリーを振り返る, 第 3 回関東すうがく徒のつどい, 2017, <http://iso.2022.jp/math/tsudoi/kanto3/slide.pdf>.
- [6] 決定不能問題ギャラリー, <http://iso.2022.jp/math/undecidable-problems/>.

*¹ Post の対応問題 (Post's correspondence problem) とは無関係です。