行列の指数関数

宇佐見 公輔

第 12 回関西すうがく徒のつどい

指数関数は微積分において重要な働きをする関数ですが、行列に対しても指数関数を考えることができます。これは、指数関数の冪級数による定義に対して、数の代わりに行列を当てはめることで得られます。

行列 X の指数関数は次のように定義されます。

$$e^X := E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots$$

行列の指数関数では、数の場合と同様の指数法則

$$e^{X+Y} = e^X e^Y$$

が成り立ちます（ただし X と Y が可換な場合）。また、指数関数の重要な特徴である、常微分方程式

$$\frac{d}{dt}F(t) = AF(t)$$

の解となる性質も、数の場合と同様に持っています。

今回の話では、上記で述べた定義や性質を詳しく説明します。予備知識としては、線型代数の初歩と微積分の初歩の知識があれば十分です。

また、行列の指数関数の重要な応用として、リー群とリー代数の話をします。リー群は、多様体の構造を持つ群です。このリー群の性質を調べる方法のひとつに、それに付随するリー代数を調べる方法があります。このリー群とリー代数の対応づけの中で、実は行列の指数関数が役に立ちます。リー群論の中で、行列の指数関数がどのように現れるかをお話しします。