円周率の近似値〜悪問から始める不定方程式論

山田智宏 (Tomohiro Yamada) @tyamada1093

ここ大阪大学の入試問題で $3.141 < \pi < 3.142$ の証明を求める問題が出題されたことがある。ただしこの問題では $\sqrt{3}$ の近似に関する情報が提示されていた（この誘導がなければ受験史に残る悪問となっただろう）。

前回のつどいにてすむーずぷりんちゃん @mat_der_D 氏が「クソ問題」と呼ばれている、π や $\log 2$ などの無理数の近似に関する問題を解いていたが、今回、$\sqrt{3}$ の近似などの情報を使わずに π のさらに強い近似を求め、その理論的な背景を考察する。

π の近似方法として、π を $\arctan(1/n)$ の一次結合であらわす方法は古くから知られており、その中でも有名なのは Machin の公式 $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$ である。

このように π を $\arctan(1/n)$ の一次結合であらわせることの背景には、$x^2 + 1$ の形の数の素因数分解が深く関わっている（このことは、前回のつどいで、すむーずぷりんちゃん @mat_der_D 氏が $\log 2$ の近似値を求める際、 2 を $1 + 1/n$ の形の分数の積であらわし、これが $\log 2$ を $\log(1 + 1/n)$ の一次結合であらわすことと等価であることを用いていたことに相当する）。

そこで、 $x^2 \pm 1$ の形の数の素因数分解に関する問題についてさらに深く考察し、また、関連する問題や定理をいくつかあげたい。

予備知識としては、初等整数論の知識だけでも概ね理解できる内容としたい（一部のみ、Gauss 整数の理論を用いる）。