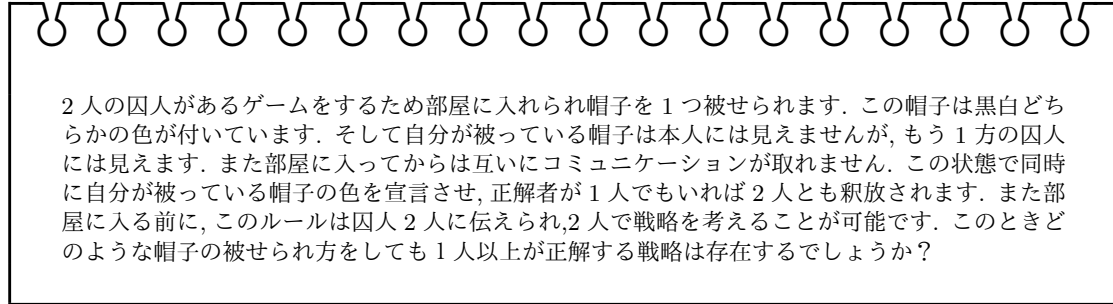


無限帽子パズルと位相空間論

souji@souji04261

1 囚人と帽子パズルとは

以下のように何人かの囚人と、何色かの帽子を用いた論理パズルを囚人と帽子パズルと呼びます。



このパズルの答えは「そんな戦略が存在する」です。どのような戦略かは頭の体操として解いてみてください。つまり囚人側には、必勝戦略があります。

他にも、囚人数、被せられる帽子の色の候補を変えたり、自分以外の全ての帽子が見えるわけではなかったり、答え合わせのための発言を先例のように全囚人同時にしなくても良かったりと様々なバリエーションがあります。このパズルにおける囚人の人数、帽子の色の数を無限に拡張したものを無限帽子パズルと呼ぶことにします。

2 講演内容

前回にあたる2018年の第11回すうがく徒のつどいにて「無限帽子パズルと選択公理」という題で発表させていただきました。その講演では、講演者の修士時代の研究テーマを発表しましたが、紹介した定理の詳細な証明はしなかったため、少し物足りなかったかもしれません。なので、今回もテーマは無限帽子パズルのままで、じっくり1つの定理に絞って証明をやるような講演をしてみようと思います。

公理的集合論を学んだことがなくとも、学部生の知識でも十分に楽しんでもらえるよう、位相空間論の知識を使用した帽子パズルの結果を抜おうと考えています。具体的には以下のような定理をじっくり証明します。

メイン定理

囚人は可算無限（証明の簡略化のため可算とするが、不可算でもOK）、帽子の色の候補は先例のように2色なパズルを考える。今回は先例のように自分以外の全ての帽子が見えるわけではなく、以下のように見えているとします。

- どんな囚人たち a, b, c, \dots, x も「 a は b の帽子が見える、かつ b は囚人 c の帽子が見える、かつ…… x は a の帽子が見える」とはならないとする
- ある囚人の集合 X があって、 X のどの囚人も、 X 内では有限な帽子しか見えていないとする

X 内の囚人たちの中で1人以上でも正解すれば囚人たちは釈放されるとします。しかし、囚人たちがいかなる戦略でゲームに望んでも、 X 内の囚人全員が不正解になるよう帽子を被せることができる。すなわち先例のように必勝戦略は存在しない。

パズルの設定がわかりにくいかもしれません。しかしこの定理は私の研究において、ときおり登場するものです。なので、この定理の証明を単にお見せするだけでなく、この定理周辺の話も含めて解説しようと思います。

この定理の証明には位相空間論の知識を必要とします。前提知識にどのような知識を使うのか書いておきますので参考にしてください。位相空間論を授業で学んだ学生を想定して証明を進めていこうと考えています。前提知識も参考にしてください。

3 前提知識

素朴集合論：

素朴集合論に慣れ親しんでいることを前提としますが、とくに必要なのは、順序対の集合としての写像、集合族の直積。

グラフ理論：

有向グラフの定義、グラフ理論の基本語彙（edge とか path とか）。

位相空間論：

コンパクト空間、直積集合への位相の入れ方。学部で扱うのかどうか分からないがコントロール空間について知っているとなおよし。コントロール空間がどのような位相空間なのかは、講演でも解説する予定。

4 参考文献

今回は以下のテキストにある定理を 1 つ紹介します。『The mathematics of Coordinated Inference』
(Christopher S. Hardin, Alan D. Taylor)

<https://www.amazon.co.jp/Mathematics-Coordinated-Inference-Generalized-Developments/dp/3319013327>

上記テキストを参考に、帽子パズルの定式化について説明した啓蒙用自作ノートもあります。帽子パズルをどのように数学の言葉で形式化するかの参考になるとと思います。<https://www.dropbox.com/s/8uv3ie7ttkha7qr/%E5%B8%BD%E5%AD%90%E3%83%91%E3%82%BA%E3%83%AB%E3%81%B8%E3%82%88%E3%81%86%E3%81%93%E3%81%9D.pdf?dl=0>

コントロール空間に関しては、淵野先生の以下のノートが役に立つと思います。『実数の集合論の基礎の基礎』
<http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/notes/set-th-of-reals-kiso-no-kiso.pdf>

帽子パズルについて、日本語で読めるものとしては、以下があります。

例に出したパズルを無限に拡張した場合の証明が載っています。

『チューリングと超パズル: 解ける問題と解けない問題』(田中 一之)

<https://www.amazon.co.jp/%E3%83%81%E3%83%A5%E3%83%BC%E3%83%AA%E3%83%B3%E3%82%B0%E3%81%A8%E8%B6%85%E3%83%91%E3%82%BA%E3%83%AB-%E8%A7%A3%E3%81%91%E3%82%8B%E5%95%8F%E9%A1%8C%E3%81%A8%E8%A7%A3%E3%81%91%E3%81%AA%E3%81%84%E5%95%8F%E9%A1%8C-%E7%94%B0%E4%B8%AD-%E4%B8%80%E4%B9%8B/dp/4130639013> 今回の内容とは直接的には関係ありませんが、無限なパズルがどのようなものを知る参考になるかもしれません。