私の趣味数学

すむーずぷりんちゃん 🍮 @mat_der_D

この講演では, twitter 等を通じて余暇に楽しんで取り組んだ数学の問題を紹介する. 特に解答の流れや, 関連して学んだ事柄について紹介する. 具体的には, 以下の問題群のうち, 一部または全部を扱う予定である. ただし, 自然数は 0 を含まない.

問 1 (嘘数学 bot)**.** 次の主張はすべて偽である. それぞれの反例を挙げよ.

(1) 自然数 a, b, c に対し, a と b が互いに素であり, b と c も互いに素ならば, a と c は互いに素である.

(2) 任意の無理数 a, b に対し, a^b は無理数である.

(3) 各辺の長さが自然数である四面体の体積は必ず無理数となる.

問 2 (黒峰問題)**.** 方程式

$$2^x + 3^y + 5 = z^3$$

を満たす非負整数の組 (x, y, z) をすべて求めよ.

問 3 (クソ問)**.** $\log_e 2$ の値を手計算で評価せよ.

問 4 (問 3 の関連問題)**.** N を自然数とする. N 個の素数を小さい順に並べたものを $p_1(=2), p_2(=3), p_3(=5), \ldots, p_N$ とする. このとき

$$p_k = \prod_{\ell=1}^{N} \left(\frac{a_\ell + 1}{a_\ell} \right)^{b_{k,\ell}} \quad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

を満たす自然数の族 $\{a_\ell\}_{\ell \in \{1,\ldots,N\}}$, $\{b_{k,\ell}\}_{k,\ell \in \{1,\ldots,N\}}$ は存在するか.

問 5 (学部時代の自作問題)**.** $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする. 自然数 n に対し, K 係数の n 次正方行列全体を $M_n(K)$ とおく. $M_n(K)$ は行列の和および K の元によるスカラー倍により線形空間となる.

$$\mathscr{X}_n = \left\{\, X \subseteq M_n(K) : \text{部分空間} \;\middle|\; \forall A \in X \setminus O, A \text{ は正則} \,\right\}$$

と定めるとき, $\displaystyle\max_{X \in \mathscr{X}_n} \dim X$ を求めよ.