高次元の図形を低次元の空間に射影・写像してみる調べるという幾何学の手法

北澤 直樹

多様体とは、1 次元の直線や曲線、2 次元の平面や曲面、我々の生きる 3 次元の空間を自然に一般化したような抽象的な空間で、図形や空間を調べる数学である幾何学、さらにあらゆる数学で欠かせない。あらゆるところに何らかの一定の成分数 (次元) の座標がうまく入っている空間として定義され、一般の n 次元のユークリッド空間や、その中の単位球面(原点からの距離が長さ 1 であるような点全体の集合) などが最も単純な例である。そして、座標が、関数や写像にユークリッド空間の場合同様微分が導入できるのに適しているようなものであるとき、可微分構造というものが自然に多様体に入る。先ほど述べた多様体には必ず入り、後で少し触れるが、中には複数の可微分構造が定義できるようなものもある。微分ができる関数や写像 (可微分写像) を介して多様体で何か意味のあることができるわけである。重要用語として、微分ができる写像の微分が退化する点、より一般的な表現だと変化の仕方が変わる点として、特異点というものが定義される (図 1)。

(可微分) 多様体の位相やより深く可微分構造について観る、知ることは、幾何学、数学に於ける基本的で重要な問題であり、多様体の (微分) 位相幾何学と呼ばれる分野の基本的で大きな問題である。多様体を、自身より次元の高くない空間への良い可微分写像、例えば Morse 関数やその特異点理論的な自然な一般化である折り目写像、もう少し一般の良い写像を用いて観る、調べるという有名な手法がある。

Morse 関数とは、各特異点のまわりで、$(x_1, \cdots, x_m) \mapsto \Sigma_{j=1}^{m-i} {x_j}^2 - \Sigma_{j=m-i+1}^{m} {x_j}^2$

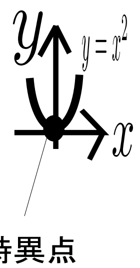

図 1: 特異点（最も標準的な放物線を与える 2 次関数）。.

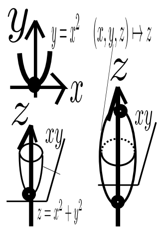

図 2: Morse 関数 (黒丸が特異点)。

の形で表せるような可微分関数である。図 2 で例を挙げる。少し補足すると、最後のは、3 次元ユークリッド空間内の 2 次元単位球面の高さを与える関数であり、一般次元でも同様に考えることができる (高次元に慣れたい方慣れている方は考えてみて下さればと思う)。

Morse 関数は、可微分多様体上に必ずしかも豊富にあり、孤立して現れる特異点から多様体のホモロジー群つまり穴に関する代数的な情報やホモトピーというより深い位相に関する情報がわかる : 例えば、図 2 の最後の Morse 関数を一般化した、特異点をちょうど 2 個有するような境界のないコンパクトな多様体上の Morse 関数の存在は、球面を 4 次元という難しいケースを除いて位相的に特徴づける。20 世紀前半には確立された理論で、1950-70 年頃の、主に自由度の高さゆえに扱いやすい、高次元の多様体の代数的位相幾何学 (ホモロジー等代数的な概念を絡めた位相幾何学)、微分位相幾何学的な理論の発展に貢献した。例えば、Milnor による 7 次元の標準的なものとは異なる可微分多様体としての球面の発見で、多様体が位相的に球面であることを示す部分で使われた。そして、高次元化として、折り目写像や一般の写像の特異点論的、幾何学的研究、例えば存在するか否か、定義域多様体の幾何学的情報に関する研究がある。1950 年代の Thom や Whitney そして Levine による 2 次元以上の平面への写像の研究に始まり、Eliashberg の折り目写像の微分方程式的な手法を介した存在問題へと受け継がれた。さらに、特に 1990 年代より今に至るまでは、佐伯修氏 (九州大学) や佐久間一浩氏（近畿大学）による、適切な写像と定義域多様体の位相や可微分構造の関係に関する研究が、活発になされている。講演者は主に最後の流れに関連し新たな風を吹かそうと研究してきている。これについて、先行研究、講演者の、具体的に自身より次元の低い空間への写像を構成して多様体の位相や可微分構造をみる、調べるという方法について、構成の難しさ、そのような中で特異点の集合の像、大方の逆像等が分かる具体的な写像や、多様体の構成に成功したことを紹介したい。特にこの写像の構成の成功に関し、イメージしにくい幾何的に表現しにくい 3–4 次元を超える高次元の多様体を自身より次元の低い空間への具体的な写像の構成により手に入れたということについて、微分位相幾何学や幾何学、数学における意味を可能な限り紹介したい。

また、単純に数学にとどまらず、最近流行りの数学の応用に関し、説明したような内容が関係しそうな話も、素人であり語る資格がない部分も多いだろうがさせて頂きたい。実際、佐伯氏は、情報系工学系の研究者とも共同し、(主に 2 – 3 次元の) データセットの可視化などに応用している。データセットは、自然に空間内の図形とみられ、射影して調べるのが常套手段であり、そこに説明してきたような考えが (多様体を何らかの形でみつけ) 応用できるのではと考えるのは、自然である中での話である。例えば、高次元のデータの可視化や表現で、講演者の高次元多様体上の具体的な写像の話は、意味があるかもしれない。最近では、低次元から高次元を把握するという哲学が、人間がなぜ低次元の簡単な情報から複雑な情報を理解できるかという話、人間の認知への応用可能性もあるという希望も有している：認知への応用可能性について、あくまで以前ある学際的な研究集会で、哲学系の研究者や高次元の空間について詳しくは説明できない面白いやり方で理解して下さっている文学系の研究者より伺った話や、講演者がみている夢等、紹介し、議論させて頂ければと思う。

なお、本アブストラクトには大変申し訳ない悪い癖激しめの内容を書いてしまったが、講演では、幾何学とは何かということや多様体、その位相や可微分構造の説明、並行して位相幾何学 (トポロジー) とは何か、等から入っていくつもりである。難しいかもしれないが、気楽に聞いて頂き少しでも何か感じて下されば幸いである。