

組み合わせ数え上げとランダム写像の漸近解析

でいぐ (@fujidig)

$\underline{n} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ とおく. \underline{n} から \underline{n} への写像全体を $\text{Map}(\underline{n}, \underline{n})$ とおく. $\text{Map}(\underline{n}, \underline{n})$ に一様分布を入れる. つまり, $\text{Map}(\underline{n}, \underline{n})$ の要素数は n^n なので, そのどれもが等確率で出るものとする. また n 次の置換全体の集合 \mathfrak{S}_n にも一様分布を入れる. これは $n!$ 個が等確率である. このとき, ランダムに元をとったときの次のような量の漸近的振る舞いが知られている:

量	$\text{Map}(\underline{n}, \underline{n})$	\mathfrak{S}_n
不動点のある確率	$\sim 1 - 1/e \sim 0.63$	
ランダムな点から出発したときの周期の期待値	$\sim \sqrt{\pi n/8} \sim 0.62\sqrt{n}$	$= (n+1)/2$
一番長い周期の期待値	$\sim c_1\sqrt{n} \sim 0.78\sqrt{n}$	$\sim \lambda n \sim 0.62n$
一番短い周期の期待値	$\sim \frac{e^{-\gamma}}{2} \log n \sim 0.28 \log n$	$\sim e^{-\gamma} \log n \sim 0.56 \log n$

表の左側下3つの結果について, 指数型母関数と特異点解析を使った証明を与えたい. 特に左側一番下の結果は講演者によるオリジナルな証明を与えることができたので, それを紹介したい.

予備知識は大学1年程度の微積分である.

参考文献

- [1] Philippe Flajolet and Andrew M. Odlyzko. Random mapping statistics. Research Report RR-1114, INRIA, 1989.
- [2] L. A. Shepp and S. P. Lloyd. Ordered cycle lengths in a random permutation. *Transactions of the American Mathematical Society*, 121(2):340–357, 1966.
- [3] Paul W Purdom and JH Williams. Cycle length in a random function. *Transactions of the American Mathematical Society*, 133(2):547–551, 1968.
- [4] Philippe Flajolet and Andrew Odlyzko. Singularity analysis of generating functions. *SIAM Journal on discrete mathematics*, 3(2):216–240, 1990.
- [5] I.P. Goulden and D.M. Jackson. *Combinatorial Enumeration*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2004.
- [6] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.
- [7] D.E. Knuth. *The Art of Computer Programming: Fundamental algorithms*. Addison-Wesley series in computer science and information processing. Addison-Wesley, 1997.
- [8] D.E. Knuth. *The Art of Computer Programming: Seminumerical algorithms*. Addison-Wesley series in computer science and information processing. Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
- [9] A208231 - OEIS. <http://oeis.org/A208231>.