多重ガンマ関数に関するいくつかの話題

たけのこ赤軍

Hurwitz ゼータ関数を

$$\zeta(s,w)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+w)^{-s}$$

で定めたとき, よく知られているように Lerch の公式

$$\frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}}=\exp(\zeta'(0,w))$$

が成り立つ[1]. これをなぞる形で, Barnes の多重ゼータ関数を

$$\zeta_r(s,w;\omega_1,\cdots,\omega_r)=\sum_{n_1,\cdots,n_r\geq 0}(n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r+w)^{-s}$$

と定めると, 多重ガンマ関数を

$$\Gamma_r(w;\omega_1,\cdots,\omega_r)=\exp(\zeta_r'(0,w;\omega_1,\cdots,\omega_r))$$

と定義することができる. 多重ガンマ関数は Barnes [Ba] のこの定義から始まり, ガンマ関数について知られている古典的定理 (周期性, Stirling の漸近公式, Gauss-Legendre の倍角公式, Raabe の積分公式, etc.) の類似が知られている. 本講演では, 歴史を追う形でこういった定理たちの類似とその一般化について紹介する.
複素解析の基礎的な知識 (“極” や “留数” などの言葉の定義, Cauchy の積分定理など) を要求する. また, ガンマ関数について, [小山] の §2.4 や [黒川] の 1 章などで多少学んでいるとより楽しめる.

References

[黒川] 黒川信重, **現代三角関数論**, 岩波書店 (2013).
[黒川小山] 黒川信重, 小山信也, **多重三角関数論講義**, 日本評論社 (2011).
[小山] 小山信也, **素数とゼータ関数**, 共立出版 (2015).
[若山] 若山正人, **Γ と ζ ゼータの行列式表示に向けて**, 応用力学研究所研究集会報告 No.16ME-S1, “非線形波動の物理と数理構造”, No. 22.
[Ad] V. Adamchik, *Polygamma functions of negative order*, Jour. Comp. Appl. Math. **100**, 191—199.
[Ba] E. W. Barnes, *On the theory of the multiple gamma function*, Trans. Cambridge Philos. Soc. 19 (1904), 374—425.

[1] ζ' は s での微分.

[EM] O. Espinosa, V. Moll, *On some integrals involving the Hurwitz zeta function: Part 2*, The Ramanujan Journal, **6** (2002), 449–468.

[Go] Gosper, R. Wm., Jr. (1997). $\int_{n/4}^{m/6} \ln\Gamma(z)\,dz$. In:M. Ismail, D. Masson, and M. Rahman, (Eds.), Special Functions, q-Series and Related Topics. The Fields Institute Communications, AMS, pp. 71—76.

[KaO] K. Katayama and M. Ohtsuki, *On The Multiple Gamma-Functions*, Tokyo J. Math. Volume 21, no. 1 (1998), 159–182.

[Ka1] H. Kawamura, *Asymptotic Expansion for the multiple gamma functions of Barnes-Milnor type*, preprint.

[Ka2] H. Kawamura, *The q-multiple gamma functions of Barnes-Milnor type*, preprint.

[KuO] N. Kurokawa and H. Ochiai, *Generalized Kinkelin's formula*, Kodai Math. J. **30** (2007), 195–212.

[KW1] N. Kurokawa, M. Wakayama, *Generalized zeta regularizations, quantum class number formulas, and Appell' s O-functions*, Ramanujan J. **10** (2005), 291–303

[KW2] N. Kurokawa and M. Wakayama, *Period deformations and Raabe's formulas for generalized gamma and sine functions*, Kyushu J. Math. Volume. **62**, (2008), 171–187.

[Ma] K. Matsumoto, *On the analytic continuation of various multiple zeta-functions*, in "Number Theory for the Millennium II, Proc. Millennial Conf. on Number Theory (UrbanaChampaign, USA, 2000), M. A. Bennett et al. (eds.), A K Peters, 2002, pp. 417–440.

[Mi] J. Milnor, *On polylogarithms, Hurwitz zeta functions, and the Kubert identities*, Enseign. Math. **29** (1983), 281–322.

[R] J. L. Raabe, *Angenäherte Bestimmung der Function* $\Gamma(1+n) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$, *wenn n eine ganze, gebrochene, order incommensurable sehr grosse positive Zahl ist*, Crelle J., **28** (1844), 10–18.

[Shin] T. Shintani, *A proof of the classical Kronecker limit formula*, Tokyo J. Math. **3** (1980), 191–199.

[Shib] G. Shibukawa, *Bilateral zeta functions and their applications*, Kyushu J. Math. **67** (2013), 429–451.

[T] H. Tanaka, *Multiple gamma functions, multiple sine functions, and Appell's O-functions*, Ramanujan J. **24** (2011), 33–60.