パンルヴェ第 VI 方程式のお話

セシル☆@sesiru8

目次

1 要旨

パンルヴェ方程式とは, ある 6 個の 2 階非線形常微分方程式の総称です. この講演では, 主に次のパンルヴェ第 VI 方程式だけに焦点を絞ってお話しします.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{x-t}\right)\frac{dx}{dt}$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-t)}{t^2(t-1)^2}\left\{\alpha + \beta\frac{t}{x^2} + \gamma\frac{t-1}{(x-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(x-t)^2}\right\}.$$

ここで x は従属変数, t は独立変数, α, β などのギリシャ文字は定数を表すこととします. またすべて複素解析的な範疇で考えるので, 変数は複素変数, 定数も複素定数とし, この方程式は複素変数 t の正則函数 $x(t)$ についての微分方程式と考えることとします.

このパンルヴェ方程式は新しい特殊函数を見つけようという試みの中で, 1900 年頃に P. Painlevé によって発見されました. またその発見後間もなく, ある 2 階の線形常微分方程式のモノドロミーの問題と関連して, 上記のパンルヴェ第 VI 方程式が現れました. しかし, それらの結果はすぐ忘れ去られてしまいます (P. Painlevé はその後国会議員となり, 1917 年と 1925 年にはフランス首相を務めました). パンルヴェ方程式の「復活」は 1973 年, 物理学のイジング模型の研究においてパンルヴェ第 III 方程式が現れたことに起因します. その後は数理物理等の発展に伴い, パンルヴェ方程式の研究は大きく進展しています.

さて, この講演の内容としては

- 動く分岐点を持たない方程式について
- モノドロミー保存変形について
- ある特別な場合の幾何学的ラングランズ対応について

を予定しています. 上記の物理学との関連については時間の関係上殆ど触れません.

参加者として高校生や学部 1, 2 回生も多いとは思いますが, 内容の都合上, 大学 3 回生程度の知識 (函数論, 常微分方程式論の初歩) は仮定させていただきます. もちろん, 多くの方々に楽しんでもらえるように努めます. 分からない部分は, これからの勉強のモチベーションのひとつになれば良いかなと思っています.

注意 1.1. この pdf の作成者は解析専攻ではないため, 内容の不備が少なからず存在すると思います. 気になる点があれば twitter の DM 等でお知らせください.

2　動く分岐点を持たない方程式について

2.1　パンルヴェ方程式の紹介

パンルヴェ方程式とは, 次の 6 つの複素解析的 2 階非線形常微分方程式の総称である.

P_I

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x$$

P_{II}

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2y^3 + xy + \alpha$$

P_{III}

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}$$

P_{IV}

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{1}{2y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}$$

P_V

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \gamma\frac{y}{x} + \delta\frac{y(y+1)}{y-1}$$

P_{VI}

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right)\frac{dy}{dx} \\ &\quad + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left\{\alpha + \beta\frac{x}{y^2} + \gamma\frac{x-1}{(y-1)^2} + \delta\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right\}\end{aligned}$$

ここで, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は複素定数である.

これらの方程式は, 新しい特殊函数を見つけようという試みの中で発見された. ここでお手本とするのは $\wp$ 函数である (参考 2.9). そもそも, どのような函数が古典的であり, どのような函数が特殊であるか, という問題もあるが, ここでは (今のところ) 触れない.

2.2 動く特異点, 動かない特異点

定義 2.1. 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上定義された x の解析函数を係数とする, $y_0, y_1, \cdots, y_n$ の多項式 $F(x, y_0, y_1, \cdots, y_n)$ に対して, 常微分方程式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \tag{2.2.1}$$

を D 上の**代数的微分方程式**という.

適当な初期値 $(x_0, \mathbf{c}) = (x_0, c_0, \ldots, c_n) \in \{F = 0\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1}$ をとるとき, 微分方程式 (2.2.1) に対する初期値問題の解, すなわち $x = x_0$ の近傍で定義された微分方程式 (2.2.1) の解となる正則函数 $y = \phi(x)$ で

$$\frac{d^j \phi}{dx^j}(x_0) = c_j, \quad 0 \leq j \leq n \tag{2.2.2}$$

を満たすもの, およびそれをできるだけ解析接続して得られる正則函数の解を

$$y = \phi(x) = \phi(x; x_0, \mathbf{c}) \tag{2.2.3}$$

と表す.

一般には, この解 (2.2.3) の函数が, ある位置 $x = a$ において極や分岐点, 真性特異点などの特異点を持つ. もし最初の方程式 (2.2.1) が線形方程式ならば, 方程式の形から解の特異点の位置, またその特異点の種類を知ることができる. 特に, その特異点の位置は初期値には依存しない (命題 2.3). 一方, 非線形常微分方程式については, この特異点の位置 $x = a$ が初期値 $(x_0, \mathbf{c})$ によって変化する場合がある.

定義 2.2. 方程式の解 (2.2.3) の特異点 $x = a$ で, 初期データ $(x_0, \mathbf{c})$ に依存するものを**動く特異点**という. 特異点の性質に従って, 動く極, 動く分岐点, 動く真性特異点, 等という. また, $x = a$ が (2.2.3) の特異点であって, 初期データに依存しないものを**動かない特異点**という.

命題 2.3. 代数的微分方程式 (2.2.1) が線形ならば, その任意の解の特異点は動かない特異点に限る.

いくつか例を見てみよう.

例 2.4 (動かない特異点)**.** 1 階線形常微分方程式

$$(x - a)\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

を考える．ここで $a \in \mathbb{C}$ とする．この方程式は一般解 $y(x) = \log(x-a) + C$ を持つ．ただし $C \in \mathbb{C}$ は積分定数である．この積分定数 C は初期データによって定まるが, この解の特異点 $x = a$ は初期データに依らない.

例 2.5 (動く分岐点)**.** $k \in \mathbb{N}$ に対して, 1 階非線形常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y^{1+k}$$

を考える．この方程式は一般解 $y(x) = k^{-1/k}(c-x)^{-1/k}$ を持つ．ただし $c \in \mathbb{C}$ は積分定数である．原点 $x = 0$ を基点にとると, この解は $x = c$, つまり分岐点までしか接続できない．この分岐点の位置は初期データに依存して変わる.

例 2.6 (動く真性特異点)**.** 1 階非線形常微分方程式

$$\left\{ y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}^2 + 4y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

を考える．この方程式は一般解 $y(x) = c_1 \exp(-\frac{1}{x-c_2})$ を持つ．ただし $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ は積分定数である．この解は $x = c_2$, つまり真性特異点までしか接続できない．この真性特異点の位置は初期データに依存して変わる.

例 2.7 (リッカチ方程式)**.** $a(x), b(x), c(x)$ を x の有理函数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x) + y + c(x), \quad a(x) \not\equiv 0 \tag{2.2.4}$$

の形の微分方程式を**リッカチ方程式** (Riccati equation) という．いま, 新しい従属変数 $u = u(x)$ を

$$y(x) = -\frac{1}{a(x)}\frac{d}{dx}\log u = -\frac{1}{a(x)}\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

で定めると, u の満たすべき方程式は

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{1}{a(x)}\frac{da}{dx} + b(x)\right)\frac{du}{dx} + a(x)c(x)u = 0 \tag{2.2.5}$$

という 2 階の線形常微分方程式となる．そこで (2.2.5) の 1 次独立な解 $\phi_0(x), \phi_1(x)$ をとり,

$$u(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x), \quad c_0, c_1 \in \mathbb{C}$$

とすれば, (2.2.4) の解

$$y(x; c_0, c_1) = -\frac{1}{a(x)}\frac{c_0\phi_0'(x) + c_1\phi_1'(x)}{c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x)}$$

が得られる ($' = \frac{d}{dx}$). 線形方程式 (2.2.5) の解 $u(x)$ は, 動かない特異点のみを持つ. よって, もともとのリッカチ方程式 (2.2.4) の解 $y(x; c_0, c_1)$ の動く特異点は, $u(x)(= c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x))$ の零点として現れる. $u(x)$ の零点は有限次数であるから, それは高々極である.

例 2.8 (動く特異点)**.** 2 階非線形常微分方程式

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3 \tag{2.2.6}$$

を考える. ここで $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ とする. この方程式の一般解は, Weierstrass の $\wp$ 函数を用いて $y(x) = \wp(x + c)$ で与えられる. ただし $c \in \mathbb{C}$ は積分定数である. 参考 (2.9) にあるように, 解 $\wp(x+c)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型函数であり, 積分定数 c に依存する無限個の極を持つ.

参考 2.9. ω_1, ω_2 を $\mathbb{R}$ 上 1 次独立な 2 つの複素数とする. $\mathbb{C}$ の部分群 Λ を

$$\Lambda := \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 | n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

により定義する. **Weierstrass の $\wp$ 函数**とは

$$\wp(x) := \frac{1}{x^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(x-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \tag{2.2.7}$$

で定義される 2 重周期函数, つまり楕円函数である.

この $\wp$ 函数は様々な良い性質を持つことが知られている. もともとこの $\wp$ 函数の拡張を目指しているので, 考えようとしている微分方程式の枠組みから外したくはない.

2.3 パンルヴェ性と諸定理

微分方程式が「性質がよい」ということの数学的表現として, P. Painlevé たちは「動く分岐点を持たない」という性質を要請した.

定義 2.10. 動く分岐点を持たないとき, 微分方程式は**パンルヴェ性**を持つという.

参考 2.11. 「動く分岐点を持たないならば, 動く真性特異点を持たない」と予想されている. 実際, 1 階非線形微分方程式の場合は Painlevé によって示されている. このことから, パンルヴェ性の定義として「動く特異点が極のみである」ことを採用する場合もある.

$F(x,y,z)$ を, 領域 D 上定義された x の解析函数を係数とする y と z の多項式とし, 1 階代数的常微分方程式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{2.3.1}$$

を考える. (2.3.1) に関する分類は Fuchs や Poincaré によって得られていた.

定理 2.12. 1 階の代数的常微分方程式 (2.3.1) がパンルヴェ性を持つとき, (2.3.1) は以下の場合のいずれかに帰着する.

1. リッカチ方程式 (2.2.4)
2. 楕円函数の方程式 (2.2.6)
3. 代数的に求積可能

この定理に関する解説は, 例えば [2] を参照せよ. このように, 方程式 (2.3.1) からは新しい超越函数は得られなかった. この定理を 2 階の微分方程式に拡張することを考えよう.

$R(x,y,z)$ を, 領域 D 上定義された x の解析函数を係数とする y と z の有理函数とし, 2 階代数的常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = R\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{2.3.2}$$

を考える. このように, 最高階 d^ny/dx^n について解かれた形の微分方程式を正規形という.

定理 2.13. 2 階の代数的常微分方程式 (2.3.2) がパンルヴェ性を持つとき, (2.3.2) は以下の場合のいずれかに帰着する.

1. 線形方程式
2. 楕円函数の方程式 (2.2.6)(を 1 回微分して得られるもの)
3. 求積可能
4. パンルヴェ方程式 $P_I, \ldots, P_{VI}$

Painlevé (とその弟子の B. Gambier) は, まず条件を満たさない方程式を排除していき, 満たさないことが言えない方程式を 50 の形に分類した. 彼らはこの 50 の方程式を片っ端から解いていき, その過程で解けずに残った 6 つの方程式が上記のパンルヴェ方程式であった.

3　モノドロミー保存変形について

3.1　問題設定

パンルヴェ方程式は, もう 1 つ別の起源を持っている. それは Riemann に始まる線形方程式のモノドロミーの問題である.

有理函数を係数とする線形常微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)y = 0 \tag{3.1.1}$$

を考える. この方程式の係数 $p_j(x)$ がある点 $x = a$ で極をもつ, すなわち $p_j(x)$ の分母が 0 になるならば, その点は一般に解の分岐点になる.

ここで, 方程式 (3.1.1) の 1 次独立な解を $y_1, \ldots, y_n$ とする. また, 方程式の極 $x = a$ の周りでこれらを解析接続したものを $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$ とすると, これらも再び (3.1.1) の解になる. このとき, ある定数行列 $M \in GL_n(\mathbb{C})$ が存在し

$$(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n) = (y_1, \ldots, y_n)M$$

と書くことができる. この行列 M を**モノドロミー行列**という.

例 3.1. 函数 $\phi(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$ は 1 階線形常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{x}y$$

の解の基本系である. ここで $\alpha \in \mathbb{C}$ とする. この微分方程式の特異点の集合は $\Xi = \{0, \infty\}$ である. $x_0 \notin \Xi$ を出発し, 原点 $x = 0$ を正の向きに 1 回だけまわって x_0 に戻る, $\mathbb{C}$ 内の閉じた道を l_0 と書く. このとき, 解の基本系 $\phi(x)$ のモノドロミー行列は

$$\phi^{l_0}(x) = \exp(\alpha(\log x + 2\pi\sqrt{-1})) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha)\phi(x)$$

より, $\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha) \in GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ であることが分かる.

いま微分方程式の係数があるパラメータ t に依存して

$$\frac{d^n y}{dx} + p_1(x,t)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x,t)y = 0 \tag{3.1.2}$$

と与えられているとする. 言い換えると, 線形常微分方程式が t に関して変形を受けているとする. このときモノドロミー行列 M もまた t ごとに定まる.

この状況でモノドロミー行列がいつ一定に保たれるか, すなわちいつ $\partial M/\partial t = 0$ となるか, という問題を考えよう. このような問題を**フックスの問題**という.

3.2 パンルヴェ第 VI 方程式の出現

$$\frac{d^2y}{dx^2} = r(x,t)y \tag{3.2.1}$$

についてフックスの問題を考える.

命題 3.2. 方程式 (3.2.1) の解の基本系で, そのモノドロミー行列が t に依らないものが存在するための必要十分条件は, x の有理函数 $a = a(x,t)$ が存在して

$$\frac{\partial^3 a}{\partial x^3} - 4r(x,t)\frac{\partial a}{\partial x} - 2\frac{\partial r}{\partial x}(x,t)a + 2\frac{\partial r}{\partial t}(x,t) = 0 \tag{3.2.2}$$

が成り立つことである.

命題 3.2 における有理函数 a は次のようになっている.

$$a(x,t) = \frac{\lambda - t}{t(t-1)} \cdot \frac{x(x-1)}{x-\lambda} \tag{3.2.3}$$

上の命題で与えた条件を具体的に書き下すことによって, 1907 年, R. Fuchs はパンルヴェ第 VI 方程式

$$\begin{aligned}\frac{d^2\lambda}{dt^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right)\frac{d\lambda}{dt} \\ &\quad + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left\{\alpha + \beta\frac{t}{\lambda^2} + \gamma\frac{t-1}{(\lambda-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right\}\end{aligned}$$

を得た.

3.3 フックスの問題についての補足 (未完成 2018/10/27)

講演ではフックスの問題について詳しく触れられないと思うので, 説明が足りない部分を補う.

注意 3.3. この小節については後程作成する予定.

4 ある特別な場合の幾何学的ラングランズ対応について

この節では, パンルヴェ第 VI 方程式に関連した幾何学的ラングランズ対応について紹介する.

4.1 幾何学的ラングランズ対応について

$\mathcal{C}onn(X,r)$ を, 滑らかな複素射影曲線 X 上の階数が r であるベクトル束に付随する接続のモジュライ空間とし, $\mathcal{B}un(X,r)$ を X 上の階数が r であるベクトル束のモジュライ空間とする.

$GL(r)$ に対する**圏論的ラングランズ予想**とは, $\mathcal{C}onn(X,r)$ 上の $\mathcal{O}$-加群のなす導来圏と, $\mathcal{B}un(X,r)$ 上の D-加群のなす導来圏とが圏同値である, という予想である.

Arinkin は [3] において, $X=\mathbb{P}^1, r=2$ として 4 点の確定特異点がある場合について, この予想を証明した. この場合は以下で説明するように, $\mathcal{C}onn(X,r)$ として特異性を持った接続のモジュライ空間を考え, $\mathcal{B}un(X,r)$ として放物構造を持ったベクトル束のモジュライ空間を考えることになる. 特に, $\mathcal{C}onn(X,r)$ に対応する空間はパンルヴェ第 VI 方程式の初期値空間と呼ばれるものになる.

4.2 放物接続について

この節では $\boldsymbol{w}$-安定 $\boldsymbol{\nu}$-放物接続のモジュライ空間を導入する.

リーマン球面 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上の異なる n 点 $\boldsymbol{t}=\{t_1,\dots,t_n\}$ を固定し, $\boldsymbol{t}$ に関する因子を $D=t_1+\cdots+t_n$ と定義する.

定義 4.1. $\mathbb{P}^1$ 上の階数が 2 で D 上に特異点を持つ**対数的接続** (logarithmic connection) とは, 次を満たす組 (E,∇) のことをいう: $d\in\mathbb{Z}$ とする.

(1) E は $\mathbb{P}^1$ 上の階数が 2 で次数が d の正則ベクトル束,

(2) $\nabla: E\to E\otimes\Omega^1_{\mathbb{P}^1}(D)$ は次を満たす層の写像である.

$$\nabla(fs)=s\otimes df+f\nabla(s),\ f\in\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, s\in E.$$

対数的接続 (E,∇) に対して, 留数行列 $\mathbf{res}_{t_i}(\nabla)\in\mathrm{End}(E_{t_i})\simeq M_2(\mathbb{C})$, $(1\le i\le n)$ を定義する. $\mathbf{res}_{t_i}(\nabla)$ の固有値を $\{\nu_i^+,\nu_i^-\}$ とする. これを ∇ の t_i での**局所指数** (local exponent) という. Fuchs の関係式により, $\sum_i(\nu_i^++\nu_i^-)=-\deg(E)=-d$ が成り立つ. ここで, 局所指数の集合を次のように定義する.

$$\mathcal{N}_n(d):=\left\{\boldsymbol{\nu}=(\nu_i^{\pm})_{1\le i\le n}\in\mathbb{C}^{2n}\,\middle|\, d+\sum_{1\le i\le n}(\nu_i^++\nu_i^-)=0\right\}\simeq\mathbb{C}^{2n-1}.$$

定義 4.2. $\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{N}_n(d)$ が**一般** (generic) であるとは次の 2 つを満たすことをいう.

(1) 任意の i に対して, $\nu_i^+ - \nu_i^- \notin \mathbb{Z}$,

(2) 次が成立する.

$$\text{任意の } (\epsilon_i) \in \{+,-\}^n \text{の取り方について} \sum_{i=1}^{n} \nu_i^{\epsilon_i} \notin \mathbb{Z}$$

$\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}_n(d)$ が一般でないとき, **特殊** (special) であるという.

$\mathbb{P}^1$ 上の正則直線ベクトル束 $L := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ と対数的接続 $\nabla_L : L \to L \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(D)$ を固定する. ∇_L は各 t_i において留数固有値 $\nu_i^+ + \nu_i^-$ を持つ.

定義 4.3. $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}_n(d)$ を固定する. $(\mathbb{P}^1, D)$ 上の (L, ∇_L) を行列式束に持つ階数が 2 の **$\boldsymbol{\nu}$-放物接続** ($\boldsymbol{\nu}$-parabolic connection) とは組 $(E, \nabla, \varphi, \boldsymbol{l} = \{l_i\})$ であって, 次を満たすもののことをいう:

(1) $(\mathbb{P}^1, D)$ 上の対数的接続 (E, ∇) であって, 階数が 2 で局所指数 $\boldsymbol{\nu}$ を持つもの.

(2) 次の関係式を満たす直線ベクトル束の同型写像 $\varphi : \bigwedge^2 E \to L$;
E の任意の局所切断 s_1, s_2 に対して

$$\varphi \otimes id(\nabla s_1 \wedge s_2 + s_1 \wedge \nabla s_2) = \nabla_L(\varphi(s_1 \wedge s_2)).$$

(3) 1 次元部分空間 $l_i \subset E_{t_i}$ であって, $\mathbf{res}_{t_i}(\nabla)$ は l_i に対して ν_i^+ を掛けることで作用するもの.

$\boldsymbol{\nu}$ が一般なものについて l_i は $\mathbf{res}_{t_i}(\nabla)$ の ν_i^+ に関する固有空間に他ならない. ゆえに, $\boldsymbol{l} = \{l_i\}$ は (E, ∇) から一意に定まる.

安定性を導入するために重さ $\boldsymbol{w}$ を定義することによって, $\boldsymbol{w}$-安定 $\boldsymbol{\nu}$-放物接続 $(E, \nabla, \boldsymbol{l})$ のモジュライ空間 $M^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ を構成することができる. $M^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ は次元が $2(n-3)$ である滑らかで既約な準射影的代数多様体になることが知られている ([5]). 一般の $\boldsymbol{\nu}$ について (E, ∇, φ) は既約であり, この場合すべての組 (E, ∇, φ) が安定対象となる.

このようなモジュライ空間はガルニエ系と呼ばれる常微分方程式の初期値空間に対応し, 特に $n = 4$ の場合は第 VI パンルヴェ方程式に対応する. これらは, 線形接続のモノドロミー保存変形として得られる微分方程式である.

初等変換により, $d = \deg(E) = -1$ としてよい. また, $(\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n$ として

$$\begin{cases} \nu_i^+ = \nu_i & (i = 1, \ldots, n) \\ \nu_i^- = -\nu_i & (i = 1, \ldots, n-1) \\ \nu_n^- = 1 - \nu_n, & \end{cases}$$

とできる．ここで $\mathcal{M}$ を $\boldsymbol{\nu}$-$\mathfrak{sl}_2$-放物接続のモジュライスタックとし，対応する粗モジュライ空間を M とする．上記の変換により $M \simeq M^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ なる同型対応を得る．

4.3 放物ベクトル束について

この節では放物ベクトル束のモジュライ空間について述べる．

定義 4.4. $(\mathbb{P}^1, \boldsymbol{t})$ 上の階数が 2 で次数が d の**準放物ベクトル束** (quasi-parabolic bundle) とは，次を満たす組 $(E, \boldsymbol{l})$ のことをいう:

(1) $\mathbb{P}^1$ 上の階数が 2 で次数が d の正則ベクトル束 E,

(2) E_{t_i} の 1 次元部分ベクトル空間 l_i の組 $\boldsymbol{l} := (l_1, \ldots, l_n)$

この $\boldsymbol{l}$ を準放物ベクトル束の**放物構造** (parabolic structure) という．また，重み $\boldsymbol{w} := (w_1, \ldots, w_n)$ の情報を合わせて考える場合は $(E, \boldsymbol{l})$ を**放物ベクトル束** (parabolic bundle) という．

定義 4.5. 準放物ベクトル束 $(E, \boldsymbol{l})$ は，与えれた局所指数 $\boldsymbol{\nu}$ を持つ接続 ∇ が付随するとき **$\boldsymbol{\nu}$-平坦**であるという．

$\mathcal{P}_d$ を直既約で次数が d の放物ベクトル束のモジュライ空間とし，対応する粗モジュライ空間を P_d とする．$\mathcal{P}_d \to P_d$ は $\mathbb{G}_m$-ジャーブである．

実は，$(E, \boldsymbol{l})$ が $\boldsymbol{\nu}$-平坦であることと直既約であることは同値である．この事実により，M から $P := P_{-1}$ への忘却写像 $(E, \nabla, \varphi) \mapsto (E, \boldsymbol{l})$ が定義される．$\boldsymbol{\nu}$ を一般として取っておくことにより，放物構造 $\boldsymbol{l} = \{l_i\}$ を固有値 ν_i^+ に対応する $\mathrm{res}_{t_i}(\nabla)$ の固有空間 $l_i \subset E_{t_i}$ と見なすことができる．

一方で，粗モジュライ空間 P_d は非分離スキーム (トポロジカルには non Hausdorff) である．$n = 4$ の場合，P は $t_1, \ldots, t_4$ で 2 重点を持った射影直線と同一視される ([4], [6])．

4.4 初期値空間と幾何学的ラングランズ対応

D.Arinkin はリーマン球面 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上 4 点に確定特異点を持つ場合の幾何学的ラングランズ対応を非可換フーリエ向井変換によって証明した [3]．以下 $n = 4, d = -1$ とし，$\mathcal{M}$ を放物接続のモジュライスタック，$\mathcal{P}$ を準放物ベクトル束のモジュライスタックとする．$\mathcal{M} \times \mathcal{P}$ 上に普遍 D_λ 加群 ξ_λ が存在し，次が成り立つ．

定理 4.6. 関手

$$\Phi_{\mathcal{M}\to P} : \mathcal{F} \mapsto Rp_{2,*}(\xi_\nu \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}\times P}} p_1^*\mathcal{F})[1]$$

は $\mathcal{D}_{qc}(\mathcal{M})^-$ と D_λ-加群のなす導来圏の間の圏同値を導く.

ここで $\mathcal{D}_{qc}^-(\mathcal{M})$ は $\mathcal{M}$ 上の準連接層のなす導来圏のある部分圏であり, $\lambda \in \mathrm{div}(P)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$ である.

確定特異点が 4 点の場合, P は 2 つの $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ を, 確定特異点を除いた部分で貼り合わせ, 確定特異点で 2 重点を持つようにしたものになっている. 上記の λ はこの 2 重点から定まるので, この 2 重点とそれに対応する $\mathcal{M}$ の元を詳しく調べることで上記の圏同値が証明された.

参考文献

[1] 岡本和夫, パンルヴェ方程式. 岩波書店, 2009.

[2] 岡本和夫, 解が動く分岐点をもたない一階代数的常微分方程式 (常微分方程式の複素解析的研究). 数理解析研究所講究録, 1973.

[3] D. Arinkin, *Orthogonality of natural sheaves on moduli stacks of SL(2)-bundles with connections on $\mathbb{P}^1$ minus 4 points.*, Selecta Math., New Series 7 (2001), 213-239.

[4] D. Arinkin, S. Lysenko, *On the moduli of $SL(2)$-bundles with connections on* $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_4\}$, Internat. Math. Res. Notices (1997), no. **19**, 983–999.

[5] M. Inaba, K. Iwasaki, M.-H. Saito, *Moduli of stable parabolic connections, Riemann- Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. I* , Publ. Res. Inst. Math. Sci. (2006), no. **4**, 987-1089.

[6] S. Oblezin, *Isomonodromic deformations of $\mathfrak{sl}(2)$ Fuchsian systems on the Riemann sphere.* Mosc. Math. J. 5 (2005), no. **2**, 415–441, 494–495.