～見上げてごらん，特異点の星を～
第 ω 特異点　特異分類理論　オーサカ *

monariz (Twitter:@tippy_thmap)

2018/10/28

1　概要

最近 Fate/Grand Order のおかげで『特異点』という言葉が市民権を得るようになってきました．しかし，いままで扱ってきた数学の 99.99...9 % の点は綺麗な" 正常点"（数学的に言うならば正則点）であり，特異点とまともに向き合うのは複素解析の「留数定理」までほとんど出てきません．[*1]私が専門としている微分幾何学でも同様で，99.99...9 % の曲線が『$c(t)$ は正則曲線（特異点を含まない曲線）と仮定する』から議論がスタートします．
今回はそんな可哀そうな特異点にフォーカスを当てたいと思います．例えば，なめらかな，微分可能な曲線を考えます．($y = |x|$ のような微分不可能な曲線は今回除外) なめらかな曲線の中には，微分が 0 になってしまう尖った特異点を含む曲線が存在します．この曲線たちの，次の $\mathcal{A}$-同値の元で，原点近傍での同値類を考えます．

Def 1　$f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ が $\mathcal{A}$-同値 ($\mathcal{A}$-*equivalent*) とは，ある微分同相写像 $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \psi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ が存在して，$\psi \circ f \circ \phi^{-1} = g$ が成り立つことである．

微分同相写像とは，つぶれたり，分裂しないなめらかな変形の写像のことです．座標変換と今回はほぼ同値です（拡大縮小，回転など）．すなわち，回転させたり拡大縮小したりして一緒になる曲線は一緒だとみなしたとき，世の中にはどれだけの特異点があるでしょうか？

すると，曲線の特異点は 3/2-cusp と呼ばれるものが多くを占めることになります．（図：次ページの中の赤色）3/2-cusp とは，$\gamma(t) = (t^2, t^3)$ と $\mathcal{A}$-同値なものを指します．ほかにも 4/3-cusp（緑），5/2-cusp（青）があります．4/3-cusp,5/2-cusp は 3/2-cusp と $\mathcal{A}$-同値ではないことが知られています．
それでは，$\mathcal{A}$-同値で特異点を分類すると，世の中には一体どれだけの特異点があるのでしょうか？その特異点の分類を，$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ の 2 変数関数，$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ の平面曲線，$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ の曲面写像について見ていきたいと思います．これが前半戦．

* 講演者は Fate/stay night UNLIMITED BLADE WORKS（ＴＶアニメ版）　と　衛宮さんちの今日のごはん　しか見たことがありません．原作 Fate や FGO は未プレイです．
[*1] 高校数学の微分が 0 になる点も特異点ですが，特異点として高校時代に向き合った人はほとんどいないと思います．曲線の意味ではサイクロイドの尖った点が最初の特異点ではないでしょうか．

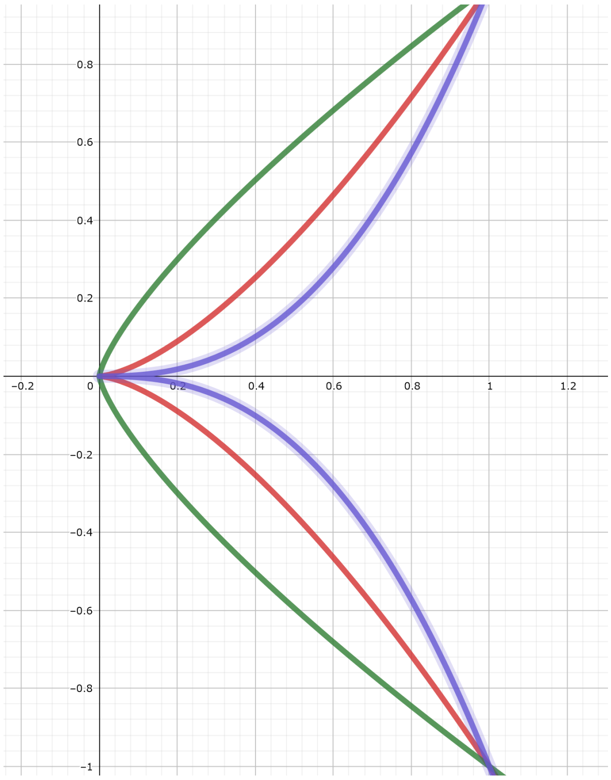

図 1　cusp いろいろ

また，$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ の 2 変数関数なら，$\mathcal{R}$-同値 ($\mathcal{A}$-同値の ψ =id 版) で特異点を分類すると次のような表ができます．

Name	Normal form
$A_k^{\pm}$ $(k \geq 0)$	$u^2 \pm v^{k+1}$
$D_k^{\pm}$ $(k \geq 4)$	$u^2 v \pm v^{k-1}$
$E_6^{\pm}$	$u^3 \pm v^4$
E_7	$u^3 + uv^3$
E_8	$u^3 + v^5$

この分類はリー群と呼ばれる構造から生まれるもので，代数幾何で主に使われています．しかしなんと，この 2 変数関数の分類の特異点と微分幾何の曲面の形が密接に関係していることが分かっています．これが後半戦です．

2　対象者・予備知識

対象者:学部 1 回生より (高校生でも数学 III 既習であれば，雰囲気はつかめると思います)
予備知識:高校数学 + 簡単な線形代数 (det,rank が分かれば十分)+2 変数の Taylor 展開
同値類，微分同相写像や曲線，曲面については最初に解説を入れます．