初等整数論、初等幾何学、離散数学における未解決問題

山田智宏 (Tomohiro Yamada) @tyamada1093

初等整数論、初等幾何学、離散数学には非常に簡単に定式化できるにもかかわらず、未だ解かれていない問題がおびただしいほどあることはよく知られている。その中には近代以前から予想が提示されていながら未だ証明も反証もされていない問題もあれば、意外にも最近になって提示された問題もある。今世紀末よりフェルマーの最終定理、ケプラー予想、Green-Tao の定理（任意の長さの素数の等差数列の存在)、そして abc 予想（多分）と、著名な問題が続々と解決されたが、未解決の問題は依然として多数存在する。ある問題が解決に至る過程で、新たな未解決問題が提起されることも少なくないため、未解決問題の数は増え続けているとさえ言える。

$6 = 1 + 2 + 3, 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ のように、自分自身を除いた約数の和がその数に一致する（あるいは自分自身も含めてすべての約数の和がもとの数の 2 倍になる）ものを完全数という。偶数の完全数は $2^{p-1}(2^p - 1)$ （ただし $2^p - 1$ は素数）の形のものですべてであることは良く知られている（しかし $2^p - 1$ が素数になることが無限に多く存在するか否かもわかっていない)。一方、奇数の完全数については、（遅くとも）デカルトが存在しないだろうという予想をしているが、未だ存在するか否かは著名な未解決問題である。

加える約数の種類に条件を課するとどうなるか？たとえば N の約数 d について d と N/d が互いに素であるという条件を付け加えて完全数に対応するものを考えてみよう。すると、奇数のものは存在しないことが容易に分かる。一方で、偶数のものは 5 つしか知られておらず、それ以外には存在しないと予想されているが、この予想も未解決なのである。このほかにも、約数の種類に様々な条件を課した類似問題や、その他の変形問題を考えることができる。そして、その多くが未解決である。

もっと違う問題を考えてみよう。縦横それぞれ n 個のマスの並んだ盤面の上に、駒をどの 3 つも同一直線に並ばないように配置する。この条件で駒の個数はどこまで増やせるか？ $2n$ 以下であることは明らかだが、$2n$ 個配置することは可能だろうか？小さい n については可能であることが確かめられているが、今のところ、不可能だと確かめられた n は存在しない。にもかかわらず、n が大きいとき、こ

の条件で $2n$ 個配置することは不可能だろうと予想されているのである。では、単純な盤面ではなくトーラスであればどうなるか？射影平面ならばどうなるか？実は射影平面のときには最も個数が多くなる配置が知られている。その場合でも、高次元への一般化など、未解決の問題は多い。

これらの問題（あるいはその関連問題）と、現時点で知られていること、講演者の研究結果を紹介したい。

予備知識としては、初等整数論や初等幾何学の知識だけでも十分楽しめる内容としたい。解析的整数論や射影幾何学、代数幾何学、離散幾何学の知識があれば、さらに楽しめると思う（既に知っていることが多くなって、つまらなくなるかも知れないが）。