

決定公理と無限玉入れ勝敗判定 (抄録)

ゼルプスト殿下 (@tenapyon)

2018 年 10 月 28 日

第 11 回関西すうがく徒のつどい

無限集合の宇宙で運動会が開催され、玉入れ競技が行なわれた。紅組の籠には最小の不可算整列基数 \aleph_1 個の玉、白組の籠には連続体濃度 2^{\aleph_0} 個の玉が入っている。いつものように、どちらかの玉が尽きるまで、両方の籠から 1 個ずつ玉を取り出していくことで、勝敗を判定しよう。

選択公理 **AC** のもとでは、よく知られているように $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ だから、白組は悪くとも引き分けに持ち込める。

いっぽう、選択公理と矛盾する決定公理 **AD** のもとでは、連続体濃度の集合の整列可能な部分集合は可算集合に限る。だから決定公理のもとでは、白組の籠の中には不可算個の玉が入っているにもかかわらず、それを取り出すことができなくて、負けてしまう。

そこで白組は勝敗判定法の変更を申し出る：同時に複数の玉をとり出してよいことにして、どちらの籠から長く玉をとり出せるか比べることにしよう。これは奇妙な提案だ。同時に複数の玉をとり出せば、それだけ籠の中の玉が減るのも早いはずではないか。アホなことを言う奴らよ、と思いながらも、紅組は白組のこの提案を受け入れることにした。すると…

～*～*～*～

この講演では決定公理について紹介し、決定公理のもとでは、連続体の「整列可能な部分集合」は可算に限るいっぽう「整列可能な商集合」できわめて大きなものが存在しうる、という話をします。オーディエンスに順序数とか基数についての基本的な知識があると助かりますが、なるべく基本のところから話します。