


無限帽子パズルと選択公理

souji@souji04261


1 囚人と帽子パズルとは

以下のように何人かの囚人と、何色かの帽子を用いた論理パズルを囚人と帽子パズルと呼びます。



2人の囚人があるゲームをするため部屋に入れられ帽子を1つ被せられます。この帽子は黒白どちらかの色が付いています。そして自分が被っている帽子は本人には見えませんが、もう1方の囚人には見えます。また部屋に入ってから互いにコミュニケーションが取れません。この状態で同時に自分が被っている帽子の色を宣言させ、正解者が1人でもいれば2人とも釈放されます。また部屋に入る前に、このルールは囚人2人に伝えられ、2人で戦略を考えることが可能です。このときどのような帽子の被せられ方をしても1人以上が正解する戦略は存在するでしょうか？

他にもいくつものバリエーションがあり、以下のようなものもよく知られています。



先ほどのパズルのルールの中で囚人の数を5人にし、囚人たちに番号0,1,2,3,4が付いているとします。さらに自分よりも大きな番号の囚人の帽子しか見えないようにします。階段上に囚人が0番の囚人を一番上に一段ずつ立っていると考えると分かりやすいです。そして今回は発言は同時ではなく0番の囚人から順に1人ずつ発言していくものとします。各囚人は自分未満の番号の囚人の発言を聞いた後に発言します。要求される正解数を4人以上とします。それ以外のルールは同じとして囚人たちが釈放される戦略は存在するでしょうか？

このパズルにおける囚人の人数、帽子の色の数を無限に拡張したものを無限帽子パズルと呼ぶことにします。

2 講演内容

有限のパズルは1960年頃から形を様々に変えてパズル愛好家の間で親しまれてきました。そして21世紀に入り無限帽子パズルに対して集合論的事実を使った研究結果がいくつも現れることとなります。本発表では上記の2つのパズルを無限に拡張した場合に知られている結果を紹介したいと思います。講演時間によって変わりますが、いくつか実際に証明も紹介しようと考えています。1つ目のパズルを無限に拡張した場合は2004年のGabay-O'Connorの定理が有名です。

1つ目のパズルの拡張

囚人の集合, 帽子の色の集合の濃度はどちらも任意の無限基数とする. このときどのような帽子の被せ方に対しても, 不正解者が有限でおさまるような戦略が存在する.

2つ目のパズルを無限に拡張した場合は 2015 年の Stefan Geschke, Robert Lubarsky, Mona Rahn の 3 人に論文にて紹介された定理が有名です.

2つ目のパズルの拡張

囚人の集合は可算, 帽子の色の数は 2 色とする. このときどのような帽子の被せ方に対しても不正解者が 1 人以下になるような戦略が存在する.

どちらの定理にも選択公理を使用します. 講演ではどのように選択公理を使うのかを証明を交えて見せ, 時間に余裕があれば同設定のパズルによって他にどのような戦略が存在するのか, そして集合論との関わりを紹介しようと考えています.

3 前提知識

以下は説明無しに使用します.

素朴集合論: 写像, 二項関係, 濃度, 選択公理

グラフ理論: 有向グラフの定義

以下は簡単な説明はしますが, 知っているより聞きやすいと思います. また講演時間によっては含まない可能性もあります.

公理的集合論: ZFC 公理系, 連続体仮説, 従属選択公理

4 参考文献

2013 年に無限も含めた帽子パズルに関する結果を集めたテキストが出版されています.

『The mathematics of Coordinated Inference』(Christopher S. Hardin, Alan D. Taylor)

<https://www.amazon.co.jp/Mathematics-Coordinated-Inference-Generalized-Developments/dp/3319013327>

日本語で読めるものとしてはテキストではありませんが以下のようなものがあります.

1つ目のパズルを無限に拡張した場合の証明が載っています.

『チューリングと超パズル: 解ける問題と解けない問題』(田中 一之)

<https://www.amazon.co.jp/%E3%83%81%E3%83%A5%E3%83%BC%E3%83%AA%E3%83%B3%E3%82%B0%E3%81%A8%E8%B6%85%E3%83%91%E3%82%BA%E3%83%AB-%E8%A7%A3%E3%81%91%E3%82%8B%E5%95%8F%E9%A1%8C%E3%81%A8%E8%A7%A3%E3%81%91%E3%81%AA%E3%81%84%E5%95%8F%E9%A1%8C-%E7%94%B0%E4%B8%AD-%E4%B8%80%E4%B9%8B/dp/4130639013>

私の修士論文も今回の発表内容を多く含みます. <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1988-04.pdf>