パンルヴェ第 VI 方程式のお話し

セシル☆@sesiru8

パンルヴェ方程式とは, ある 6 個の 2 階非線形常微分方程式の総称です. この講演では, 主に次のパンルヴェ第 VI 方程式だけに焦点を絞ってお話しします.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{x-t}\right)\frac{dx}{dt}$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-t)}{t^2(t-1)^2}\left[\alpha + \beta\frac{t}{x^2} + \gamma\frac{t-1}{(x-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(x-t)^2}\right].$$

ここで x は従属変数, t は独立変数, α, β などのギリシャ文字は定数を表すこととします. またすべて複素解析的な範疇で考えるので, 変数は複素変数, 定数も複素定数とし, この方程式は複素変数 t の正則函数 $x(t)$ についての微分方程式と考えることとします.

このパンルヴェ方程式は新しい特殊函数を見つけようという試みの中で, 1900 年に P. Painlevé によって発見されました. またその発見後間もなく, ある 2 階の線形常微分方程式のモノドロミーの問題と関連して, 上記のパンルヴェ第 VI 方程式が現れました. しかし, それらの結果はすぐ忘れ去られてしまいます (P. Painlevé はその後国会議員となり, 1917 年と 1925 年にはフランス首相を務めました). パンルヴェ方程式の「復活」は 1973 年, 物理学のイジング模型の研究においてパンルヴェ第 III 方程式が現れたことに起因します. その後は数理物理等の発展に伴い, パンルヴェ方程式の研究は大きく進展しています.

さて, この講演の内容としては

- 動く分岐点を持たない方程式について
- モノドロミー保存変形について
- ある特別な場合の幾何学的ラングランズ対応について

を予定しています. 上記の物理学との関連については時間の関係上殆ど触れません.

参加者として高校生や学部 1, 2 回生も多いとは思いますが, 内容の都合上, 大学 3 回生程度の知識 (函数論, 常微分方程式論の初歩) は仮定させていただきます. もちろん, 多

くの方々に楽しんでもらえるように努めます. 分からない部分は, これからの勉強のモチベーションのひとつになれば良いかなと思っています.

参考文献

[1] 岡本和夫, パンルヴェ方程式. 岩波書店, 2009.

[2] D. Arinkin, *Orthogonality of natural sheaves on moduli stacks of SL(2)-bundles with connections on* $\mathbb{P}^1$ *minus 4 points.*, Selecta Math., New Series 7 (2001), 213-239.