

高次元圏入門

@alg_d

圏なんて何の役に立つのか? というようなことはよく耳にしますが今回は (今回も?) そんなことは気にせず更に一般化した《高次元化した圏》がどういうものを話します。

《高次元化》と書きましたが、圏とは通常は「対象」と「射」からなるものであり、絵では $a \xrightarrow{f} b$ のように描かれます。つまり「対象」は 0 次元の《点》、「射」は 1 次元の《線》で表されており、この意味で通常の圏は 1 次元の圏と呼ばれます。ところで一方、圏の圏 **Cat** では、「射」 (= 関手) の間には自然変換と呼ばれる「射」があり、絵では

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ C & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \theta \\ \curvearrowleft \end{array} & D \\ & G & \end{array}$$

のようになります。つまり、自然変換は「射」と「射」を繋ぐ 2 次元の《面》のようになっており、その意味で **Cat** は《2 次元の圏》となっています。このような構造になっているものを一般には 2 圏といい、《高次元化した圏》と思う事ができます。

このような考え方を更に進めることで、《3 次元の圏》である 3 圏、《4 次元の圏》である 4 圏、 \dots 、《 n 次元の圏》である n 圏、 \dots 、そして最終的には《 ∞ 次元の圏》である ∞ 圏を考えることができるでしょう。ところが実際にこれらを定義しようとすると、どのような定義をするべきかという問題が出てきます。そこで今回はこの問題について説明し、どのようなことが知られているかを 2 圏・3 圏について説明します。

あまり激しい圏論は使わない予定なので圏論はそれほど仮定しませんが、例としては基本群や R 加群のようなものが出てくる予定なので、そういうのを知っていると聞きやすいと思います。

参考文献

- [1] Nick Gurski, Coherence in Three-Dimensional Category Theory, Cambridge University Press (2013)