～見上げてごらん，特異点の星を～
第 ω 特異点　特異分類理論　オーサカ *

monariz (Twitter:@tippy_thmap)

2018/10/27,28

1　全般的な概要

最近 Fate/Grand Order のおかげで『特異点』という言葉が市民権を得るようになってきました．しかし，いままで扱ってきた数学の 99.99...9 % の点は綺麗な" 正常点"（数学的に言うならば正則点）であり，特異点とまともに向き合うのは複素解析の「留数定理」までほとんど出てきません．*1私が専門としている微分幾何学でも同様で，99.99...9 % の曲線が『$c(t)$ は正則曲線（特異点を含まない曲線）と仮定する』から議論がスタートします．
今回はそんな可哀そうな特異点にフォーカスを当てたいと思います．例えば，なめらかな 2 変数関数 $f(u,v)$ を考えます．この中には，微分が消えてしまう特異点を含む関数が存在します．この関数たちを，次の $\mathcal{R}$-同値の元で，原点近傍での同値類を考えます．

Def 1　$f,g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ が $\mathcal{R}$-同値 ($\mathcal{R}$-*equivalent*) とは，ある微分同相写像 $\phi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ が存在して，$f\circ\phi=g$ が成り立つことである．

※微分同相写像とは，つぶれたり，分裂しないなめらかな変形の写像のこと．座標変換と今回はほぼ同値．（拡大縮小，回転など）
すると，次の事実が陰関数定理より成り立ちます．

Th 2　原点が正則点ならば，f は $g(u,v)=u$ と $\mathcal{R}-$ 同値．

すなわち，正則点はすべて $\mathcal{R}$-同値で 1 つの同値類になります．しかし，特異点は 1 つの同値類ではなく，無数の同値類に分かれることが知られています．今回はその特異点の分類を，$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ の 2 変数関数と，$\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ の平面曲線，$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ の曲面写像について見ていきましょう．

2　対象者・予備知識

対象者:学部 1 回生より (高校生でも数学 III 既習であれば，雰囲気はつかめると思います)
予備知識:高校数学 + 簡単な線形代数 (det,rank が分かれば十分)+2 変数の Taylor 展開
同値類，微分同相写像や曲線，曲面については最初に解説を入れます．

---

* 講演者は Fate/stay night UNLIMITED BLADE WORKS（ＴＶアニメ版）　と　衛宮さんちの今日のごはん　しか見たことがありません．原作 Fate や FGO は未プレイです．

*1 高校数学の微分が 0 になる点も特異点ですが、特異点として高校時代に向き合った人はほとんどいないと思います．曲線の意味ではサイクロイドの尖った点が最初の特異点ではないでしょうか．