

# 決定不能問題

y. (@waidotto)

突然ですが、次の問題を考えてみましょう。

**問題 (素数判定問題).** 正の整数がひとつ与えられたとき、それが素数かどうかを判定するにはどうすればよいか。

この問題は中学生でも解くことができると思います。実際、次のように答えることができるでしょう。

**解答.** 与えられた整数を  $n$  とおく。  $n = 1$  なら素数ではないし、  $n = 2$  なら素数である、  $n > 2$  なら、  $2, 3, \dots, n-1$  で順番に割ってみて、どれか一つでも割り切れるものがあれば素数ではない。どれも割り切れなければ素数である。

さて、上の問題をよく見ると、「20170813 は素数か？」といった問題とは少々趣が異なっていることがわかります。というのも、上の問題は具体的な個々の正整数が素数かどうかを問うているのではなく、「すべての正整数に対して、素数かどうかを正しく判定できるようなひとつの“方法”を与えよ」と言っているからです。ここでいう“方法”というのは、現代的には「アルゴリズム」あるいは「プログラム」と言い換えることができるでしょう。この立場で見ると、20170813 という整数そのものは「問題」ではなく、無限にある「入力」のひとつにすぎません。

素数判定問題のように、与えられた入力 (数や文字列、グラフなどの有限の対象) に対して YES か NO で答える問題を**決定問題 (decision problem)** といいます。決定問題を解くということは、すべての入力に対して正しく答えるアルゴリズムを作るといことです。

ここで次のような疑問が生じます。

どんな決定問題にも、それを解くアルゴリズムが存在するだろうか？

この疑問に対する答えは (タイトルにあるとおり) 否、です。決定問題のうち、それを解くアルゴリズムが存在しないようなものを**決定不能問題 (undecidable problem)** といいます。これがこの講演のテーマです。

この講演では、以下のようなことを話そうと思っています。

- Turing 機械の定義と Church-Turing の提唱,
- 決定不能問題の存在 (停止問題),
- 決定問題が決定不能であることを証明する方法,
- いろいろな決定不能問題の例.

前提知識としては四則演算ができれば (本質的には) 事足りると思います。プログラミングの経験は不要ですが、あればより楽しく聞けると思います。

## 参考文献

- [1] M. Sipser (太田和夫・田中圭介 監訳, 阿部正幸・植田広樹・藤岡淳・渡辺治 訳), 計算理論の基礎 [原著第 2 版] 2. 計算可能性の理論, 共立出版, 2008.
- [2] B. Poonen, *Undecidable problems: a sampler*, Preprint, arXiv:1204.0299v2, 2012.
- [3] 河村彰星, はじめての計算可能性, 数学基礎論サマースクール 2017, <http://toshio-suzuki-logic.jp/meeting/summer2017.html>.