

圏のことなんか忘れて圏論をしよう

@alg_d

全ての集合の集まり Set みたいなのを一般化したものが圏です。すると一般の圏 C において集合論的な事を考えられるか? という問題が生まれます。例えば代表例として選択公理を考えて見ましょう。選択公理というのは「任意の全射 $f: a \rightarrow b$ に対して、写像 $g: b \rightarrow a$ が存在して $f \circ g = \text{id}$ となる」という命題のことですから、この命題の圏 C バージョンを考えると「 C のエピ射 $f: a \rightarrow b$ に対して、 C の射 $g: b \rightarrow a$ が存在して $f \circ g = \text{id}$ となる」となって、圏 C に一般化すると選択公理というのは成り立ったり成り立たなかったりするんだなあという感想になります。* こういうのは、集合や写像のことは忘れて、圏 C の対象を集合、射を写像だと思って集合論をしていると言えます。

上記の「集合論的」の部分に「圏論的」な部分に変えたことを考えるのが今回の講演内容であり、formal category theory と呼ばれているものです。

まず Set の代わりに今度は圏の集まり Cat を考えます。Cat の特徴は、対象 (圏) と射 (関手) だけではなく、射と射の間の射 (自然変換) も存在することです。

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ C & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \theta \\ \curvearrowleft \end{array} & D \\ & G & \end{array}$$

このような射と射の間にも射があるようなものを 2 圏 (2-category) といい、Cat の一般化になっています。そこで圏論的な事を Cat ではなく一般の 2 圏で考えようというのが formal category theory です。

最初に述べた集合論の方は、圏に一般化してしまうと色々成り立たなくなってしまう印象[†]ですが、formal category theory では圏論のかなりのことが成り立つ[‡]ことが知られています。そういうことを紹介するのが目的です。

* 実際はもっと色々知られています。[1] など参照。

[†] こういうことを考えるときは普通は圏にもうちょっと条件 (トポス等) をつけると思います

[‡] alg_d.com は最初から formal category theory で書いた方が書くのが楽なんじゃないか? と思うくらいには成り立ちます。(読者の理解が楽とは言っていない)

前提知識は可能な限り無いようにしますが，実際は圏論をある程度やったことがないと何をやっているのかさっぱり分からないと思います．

参考文献

- [1] John L. Bell, The Axiom of Choice, College Publications
- [2] @alg_d 先生による formal category theory 入門, <https://togetter.com/li/966124>
- [3] alg-d, 圏論 | 壱大整域, http://alg-d.com/math/kan_extension/