補間空間、Besov-Triebel-Lizorkin 空間
～これが最強の偏微分方程式研究メソッド～

M.NUENO@mnuenoforKST

解析学の研究には大きく分けて二通りの手段がある。一つはつい百年程前から始まった新しい方法であり、ある関数グループに共通する性質、例えば有界性、可積分性、急減少性、を見出し、その集合を一つの 関数空間 と考え、その空間そのものの性質を研究する事によって、如何なる問題に対しても利用可能な抽象理論を与える方法である。このような方法はソフトアナリシス、関数解析学と呼ばれている。

もう一つは個々の関数や方程式等に関して脈々と受け継がれてきた知識や処方を用いた伝統的な解析計算であり、ハードアナリシスと言われる。往々にして証明中で最も難しいのはこの部分であり、現在の所ソフトアナリシスだけで全てを片付ける事はできないが、逆に言えば、難しい計算に共通する性質を取り出し、パッケージ化してきた文明の所産が関数空間なのであるとも言える。

p 乗可積分空間 L^p, Sobolev 空間 H^s_p, Hardy 空間 $\mathcal{H}^p$, 有界平均振動クラス BMO……様々な空間が必要に応じて考えられ、そしてついに 1960 年代後半、それらは Besov 空間 $B^s_{p,q}$,Triebel-Lizorkin 空間 $F^s_{p,q}$ によって統合された。

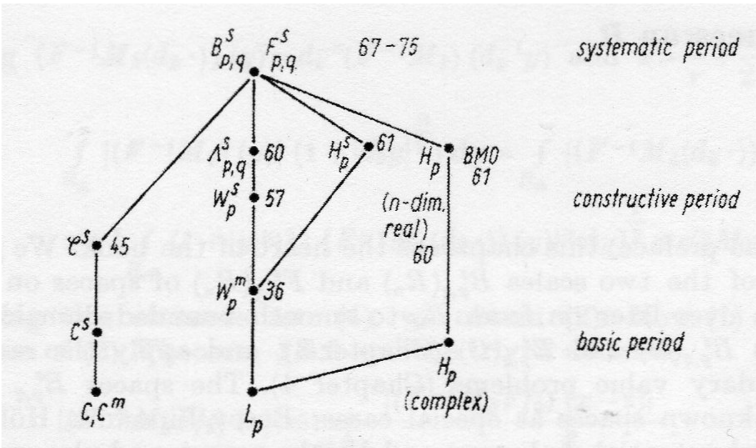

図 1　なんという最終形態…Besov 空間 ($B^s_{p,q}$),Triebel-Lizorkin 空間 ($F^s_{p,q}$) この空間は間違いなく重要である

解析学の証明は大量の不等式からなるが、常に興味があるのは 最良評価 である。無駄がなくギリギリの不等式による結果こそ、本質を抉り出すものであると考えられる。前述の様に伝統的技術を要する難しい部分も依然あるが、ノルムを含む不等式の中にはソフトアナリシスで捉えられる部分も多い。例えば式の途中で $||u||_Y$ まで変形できたとして、これをある希望のノルム $||u||_X$ で抑えても良いか？すなわち埋め込み

$$||u||_Y \le c||u||_X \Leftrightarrow X \overset{\iota}{\hookrightarrow} Y \tag{1}$$

を満たす大きな X の候補は。これは Besov-Triebel-Lizorkin 空間間の埋め込みとして理解される。あるいは

線型作用素 T に対して $||Tu||_Y$ まで来たとして、T を消しても良いか？

$$||Tu||_Y \leq c||u||_X \Leftrightarrow T \in \mathscr{L}(X;Y) \tag{2}$$

すなわち T を連続にする大きな X の候補は。Besov-Triebel-Lizorkin 空間は定義がシステマティックなので、その上で T の有界性を考えると便利である。更に今二つの比較的簡単な有界性評価は証明できた:

$$||Tu||_{Y_0} \leq c||u||_{X_0} \tag{3}$$

$$||Tu||_{Y_1} \leq c||u||_{X_1} \tag{4}$$

この時これらを合わせて希望の有界性を引き出せないか？

$$||Tu||_? \leq c||u||_? \tag{5}$$

? に当たる最良の空間は 補間空間 と呼ばれる物である事がわかっているが、Besov-Triebel-Lizorkin 空間はそもそもある種の補間空間として理解されるべきものであり、このような操作は定義のような物である。

勿論関数空間だけでなくその上で働く作用素の事をも知らなければ、ソフトアナリシスの半分も理解したとは言えない。微分作用素、特異積分作用素、擬微分作用素、そして Fourier 積分作用素……そちらもついに究極の作用素に辿り着いた様である。熊ノ郷先生は著書 [4] の中で次のように書かれている。「擬微分作用素をさらに一般化した Fourier 積分作用素...... この理論によって偏微分方程式の解の特異台の伝播の様子が浮彫りにされるであろう。」しかし、本講演では作用素には立ち入らず関数空間に絞り、補間空間の抽象理論をきっかけとして Besov-Triebel-Lizorkin 空間に到達し、関数空間を統合する。またこれらの空間が実際に最良評価を得るためにどのように用いられているのか、要所要所で具体的な証明などを参照しつつ説明したい。

図 1 の出典は Triebel 氏自身による著書 [1] である。講演の主な参考文献は [2, 3]. Hörmander 氏の四巻本 [5] は線形偏微分方程式論の集大成とみなされている。

予備知識は線形空間と線形写像、位相、ノルムについての大雑把な知識。関数空間について深く知っていなくとも楽しめるよう工夫したい。

参考文献

[1] H.Triebel, Theory of Function Spaces, 2010, Springer Basel.

[2] 澤野嘉宏, ベゾフ空間論, 2011, 日本評論社.

[3] 小川卓克, 非線型発展方程式の実解析的方法, 2013, 丸善出版.

[4] 熊ノ郷準, 擬微分作用素, 1974, 岩波書店.

[5] L.Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I-IV, 2003-2009, Springer Berlin Heidelberg.