Chern-Weil 理論

リング@matsumoring

多様体の基礎的な知識（多重線形代数, ベクトル場, （ベクトル空間に値をとる）微分形式, de Rham コホモロジー程度）を仮定して, Chern-Weil 理論について説明します. 具体例として複素ベクトル束の Chern 類や S^1 束の Euler 類などを予定しています. 聴衆として学部 3,4 回生を想定しています. Chern-Weil 理論については下に概要を記載します. Lie 群が出てきますが, 必要なことについては簡単に説明します. （主）ファイバー束の定義から始めます. 全て証明をつけることはできないので, 理論の流れを概説するという形になります.

以下 Chern-Weil 理論の概要です. 全て C^∞ の範囲で考えます. 2 つの多様体 B, F を固定します. B の上に を F を綺麗に並べてできる多様体 E をファイバー束といいます. E を全空間, B を底空間, F をファイバーといいます. 「綺麗に」というのは、B のどの点の近傍でも E は局所的に B の開集合と F との直積と微分同相となっているということです. B のある点の近傍で E を 2 通りの方法でこのように直積として表すと, F の自己微分同相群の元たちが得られます. この元が全てある部分群 G に入っているとき, G をファイバー束の構造群と呼びます. ファイバー束は大域的に直積にはなっていないため, 垂直方向（ファイバーの方向）は自然に定義されるのですが, 「水平方向（底空間の方向）」は自然に定義されません. 各点での水平方向を指定することを, 「接続を入れる」と言います.

G を Lie 群とします. ファイバーも構造群も G であるようなファイバー束を主 G 束と言います（構造群 G は G への左からの自然な作用を考えています）. 主 G 束の全空間には G が右から自然に作用し, 接続を入れる場合もこの作用に関して自然なものという条件を要求します. 主 G 束（全空間を P, 底空間を M とする）に接続を入れると, 接続形式 (resp. 曲率形式）と呼ばれる, G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値を持つ P 上の 1-形式,（resp. 2-形式）が定義されます. $\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ の元が与えられると, 合成により接続形式 (resp. 曲率形式）は P 上の通常の 1-形式,（resp. 2-形式）を定めますが, これを外積代数（resp. 対称代数）に拡張してテンソル積をとることにより, G の Weil 代数 $W(\mathfrak{g}) := \bigwedge^* \mathfrak{g}^* \otimes S^*\mathfrak{g}^*$ から P 上の微分形式全体の成す代数への準同型が入ります. これを G の不変多項式代数 $I(G) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} I^k(G)$ というものに制限すると ($I(G)$ は $S^*\mathfrak{g}^*$ の部分代数です）, その像は底空間 M の閉形式と同一視できることがわかり, したがって G の不変多項式代数から M の de Rham コホモロジー代数への準同型が入ります. これを Weil 準同型と言います. Weil 準同型は接続を 1 つ固定して定義されましたが, 実はこれは接続の取り方に依らないことがわかり, 各 $f \in I^k(G)$ ごとにその像は主 G 束 ξ の特性類 $f(\xi) \in H^{2k}_{DR}(M)$ を定めることがわかります. これが Chern-Weil 理論の主定理です.