

グレブナー基底大好き bo 徒になろう

@groebner_basis

皆さんこんにちわ！グレブナー基底大好き bot ぶなよっ！

突然ですが、皆さんは、「グレブナー基底」という言葉を聞いたことがありますぶなか？

グレブナー基底は、1965 年ごろにブッフバーガー氏や広中平祐氏によって発見された、多変数多項式環上のイデアルの特殊な基底のことで、可換環論、代数幾何学を始め、微分方程式論、代数統計学、整数計画問題など、多岐にわたって応用されているぶなっ！

なぜ、グレブナー基底が、これほどまで応用されているのか？それは、コンピュータでグレブナー基底を計算することで、多項式環における様々な演算や計算ができるようになるからぶなっ！

例えば、連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy + y^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

を解きたいときには、この連立方程式に対応するイデアル $\langle x^2 + y^2 - 5, xy + y^2 - 6 \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y]$ のグレブナー基底を計算すると、

$$\{2y^4 - 17y^2 + 36, 6x + 2y^3 - 11y\}$$

が (lex 順序 $x > y$ における) グレブナー基底として出てくるぶな！ここで、実は、

$$\langle x^2 + y^2 - 5, xy + y^2 - 6 \rangle = \langle 2y^4 - 17y^2 + 36, 6x + 2y^3 - 11y \rangle$$

が成立しているぶなから、

$$\begin{cases} 2y^4 - 17y^2 + 36 = 0 \\ 6x + 2y^3 - 11y = 0 \end{cases}$$

はさっきの連立方程式と解が同じものになっていて、 y だけの式 $2y^4 - 17y^2 + 36$ を作りだすことができたぶな！よって、 $2y^4 - 17y^2 + 36 = 0$ を因数分解して (アルゴリズムが存在してコンピュータで計算できる)、

$$(y+2)(y-2)\left(y+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(y-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=0$$

が出て、後は 2 つ目の式に代入して、 x を求めれば、

$$(x, y) = (1, 2), (-1, -2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

が元の連立方程式の解として、求められたぶなっ！ぶな汁ブシャアアアあああ！！

この他にも、多変数多項式環における、 $\text{GCD}(f, g)$ の計算、 $I \cap J$ の計算^{*1}、 $I:J$ の計算、 \sqrt{I} の計算、準素イデアル分解、ヒルベルト多項式の計算、代数多様体の次元の計算、コホモロジーの計算などなど、可換環の色々な計算に応用されるぶなっ！

*1 I, J はイデアル

今回の発表では，グレブナー基底の入門として，グレブナー基底の定義から始めて，グレブナー基底の同値条件，存在性，計算アルゴリズム，そして可換環（多項式環）への応用を紹介しますぶなっ！

前提知識は，環論の初歩を知っていれば十分ぶな！（もちろん知らなくても OK）

また，パソコンを所持していて，Mathematica などのグレブナー基底を計算できる数式ソフトが入っていると，より楽しめますぶなっ！（パソコンを所持していない人は，スマホを使って Web で計算することもできるぶなが，入力がしづらいかもしれないぶな）

以下に，当日までにインストールしておくといいグレブナー基底を計算できる数式処理ソフトと，参考文献を記述しますぶなっ！

- 有料のもの
 - Mathematica (<http://www.wolfram.com/index.ja.php?footer=lang>)
 - Maple (<http://www.cybernet.co.jp/maple/>)
 - Magma (<http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/>)
- 無料のもの
 - Risa/Asir (<http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir-ja.html>)
 - SINGULAR (<https://www.singular.uni-kl.de/>)
 - Macaulay2 (<http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>)
 - GAP (<http://www.gap-system.org/>)
 - CoCoa (<http://cocoa.dima.unige.it/>)
 - Sage (<http://www.sagemath.org/>)

参考文献

- [1] D. Cox, J. Little, and D. O’Shea, *IDEALS, VARIETIES, AND ALGORITHMS*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer Science+Business Media, New York, third edition, 2006. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra.
- [2] D. コックス, J. リトル, D. オシー, 『グレブナ基底と代数多様体入門(上・下)』(落合啓之ほか訳), 丸善出版, 2000 年
- [3] ぶなぶなくん, 『5分で分かるグレブナー基底』, Amazon, Kindle, 2015 年
- [4] ぶなぶなくん, 『グレブナー基底と初等幾何の定理の自動証明』, Amazon, Kindle, 2016 年
- [5] 『グレブナー基底大好き bot さんの togetter まとめ』 http://togetter.com/id/groebner_basis
- [6] グレブナー基底大好き bot, 『最近、妹がグレブナー基底に興味を持ち始めたのだが。』, カクヨム, <https://kakuyomu.jp/works/1177354054880542193>