

エキゾチックな π の超越性証明

素数 T シャツ

概要

周知の証明法とは異なる, $\zeta(2, \dots, 2)$ を用いた Sorokin による π の超越性証明を紹介する.

Theorem 1 (Lindemann, 1882). π は超越数である.

この定理の Lindemann による証明は 1873 年に Hermite が e の超越性を証明した際に成功した手法を $e^{\pi i} + 1 = 0$ によって π にも適用可能にするというものであった.

ところで, 多重ゼータ値に関する次の結果は古典的である:

Theorem 2.

$$\zeta(\underbrace{2, \dots, 2}_n) = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}.$$

すると, π^2 の超越性 (従って π の超越性) は任意の正整数 n に対して

$$1, \zeta(2), \zeta(2, 2), \dots, \zeta(\underbrace{2, \dots, 2}_n)$$

が \mathbb{Q} 上一次独立であることと同値である. つまり, 我々はこの問題に π のことを完全に忘れてしまっても取り組むことができる.

確かにそうだ. しかし, ゼータ値の一次独立性を証明するなんて π の超越性を直接証明するより難しいのではないかな?

などとボヤいてみても, Sorokin がそれをやったと言うのだから致し方ない. 講演ではそんなエキゾチックな証明を紹介する. 単に別証明を与えるという事ではなく, ゼータ値の理解という観点からは (Sorokin の仕事は) 重要なのもかもしれないと期待している.

参考文献

- [S] V.N. Sorokin, *On the measure of transcendency of the number π^2* , Sb. Math. **187** (1996), no. 12, 1819–1852.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University
Toyonaka, Osaka 560-0043 Japan
E-mail address: shinchan.prime@gmail.com