幸せな結婚を目指して

Y.Y. (@ygussany)

第8回関西すうがく徒のつどい　2016/03/21

注意

本講演は**フィクション**です

幸せになれなくても責任は負いません

幸せそうな結婚2016

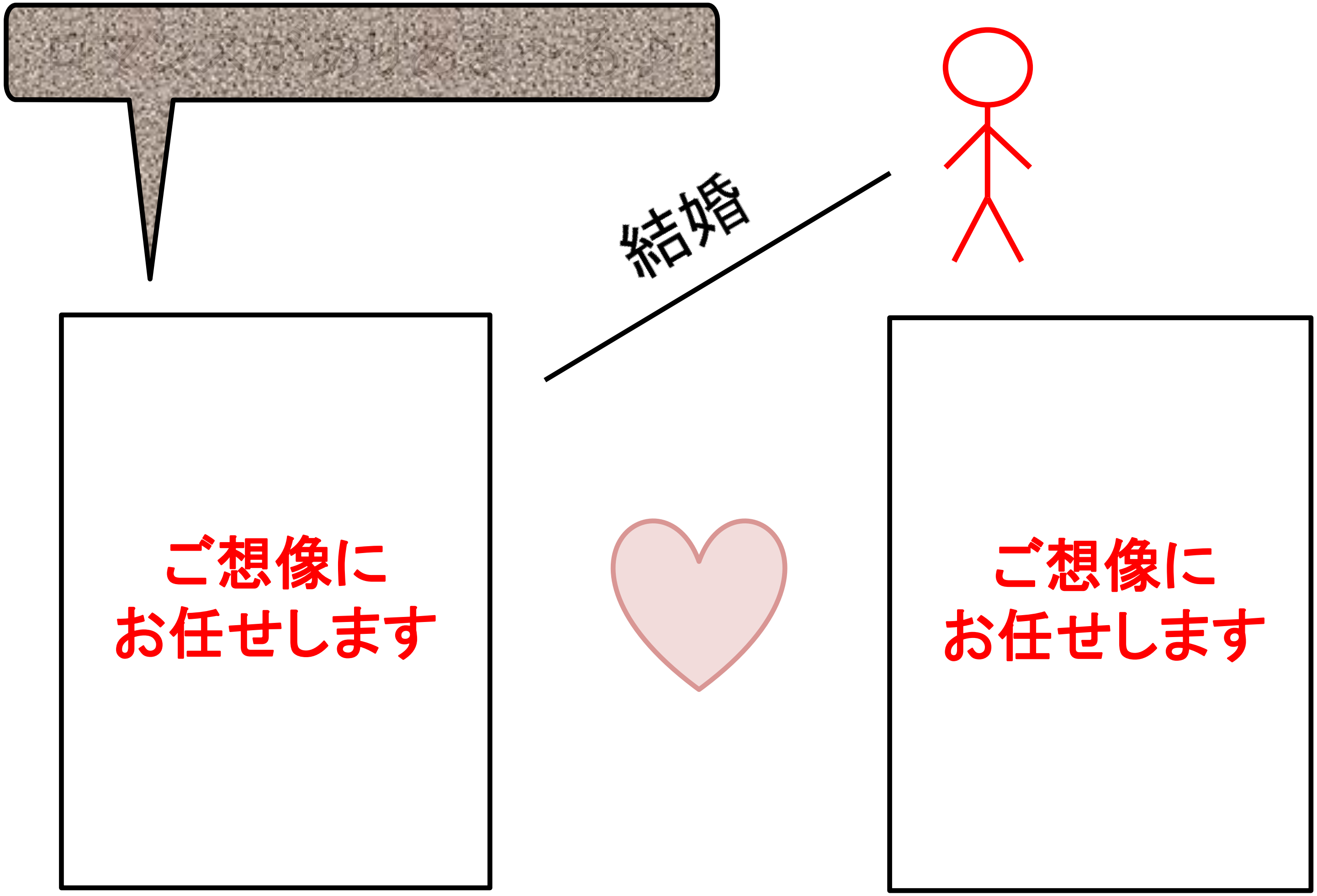
僕にとってはもったいないくらいパーフェクト

すべてに惹かれてこういう形になったと思います

**ご想像に
お任せします**

**ご想像に
お任せします**

幸せそうでない結婚2016



ロマンスがありあま～る♪

結婚

ご想像に
お任せします

ご想像に
お任せします

全体の構成

- 個人が幸せになるためには
  - 1番好きな人と結婚できる確率を上げる
  - 結婚相手の順位の期待値を下げる

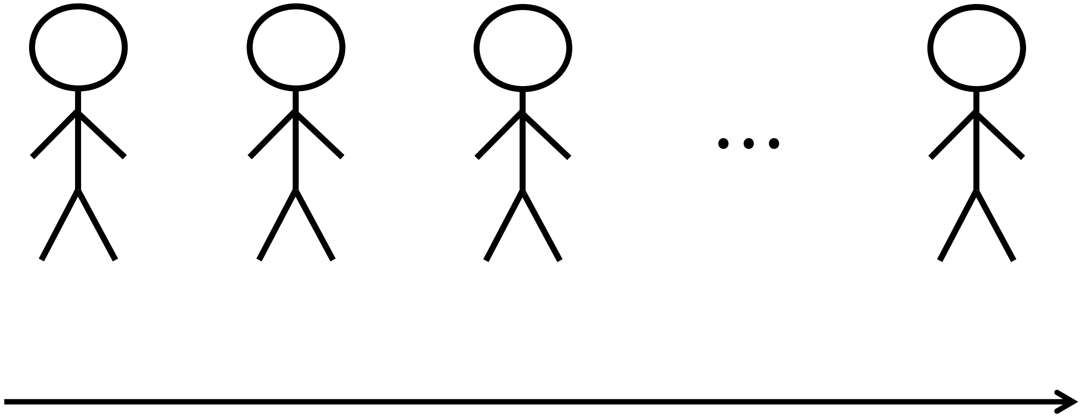
- 安定な結婚とは
  - 駆け落ちが起こらないカップリング
  - 絶望の定理 (田舎の病院定理)
  - 嘘つきは得をするか

全体の構成

- 個人が幸せになるためには
  - 1番好きな人と結婚できる確率を上げる
  - 結婚相手の順位の期待値を下げる
- 安定な結婚とは
  - 駆け落ちが起こらないカップリング
  - 絶望の定理 (田舎の病院定理)
  - 嘘つきは得をするか

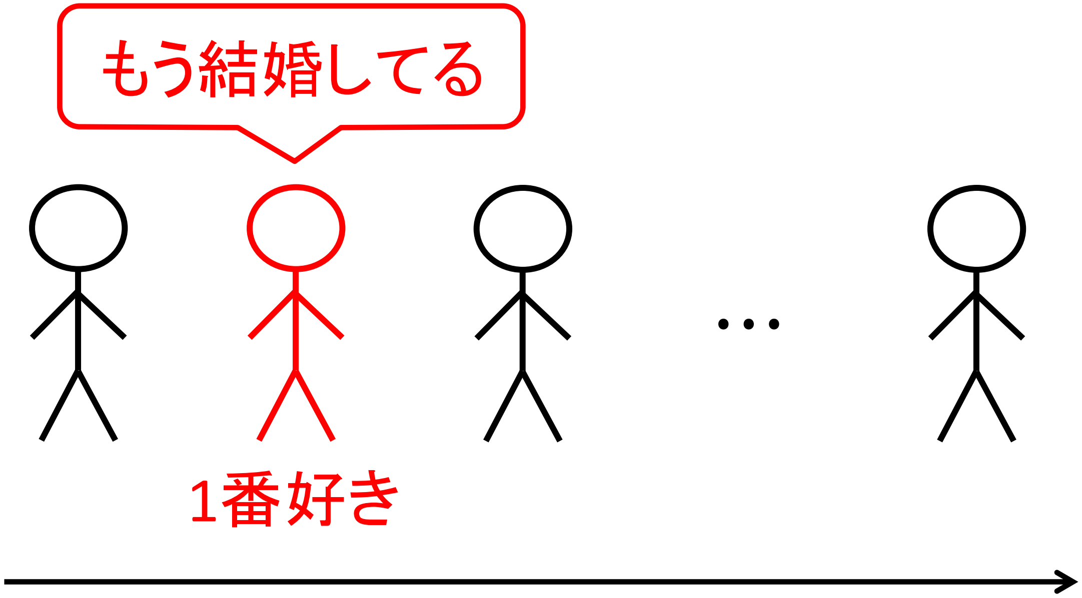
結婚問題 (a.k.a. 秘書問題)

出会いと別れは逐次的



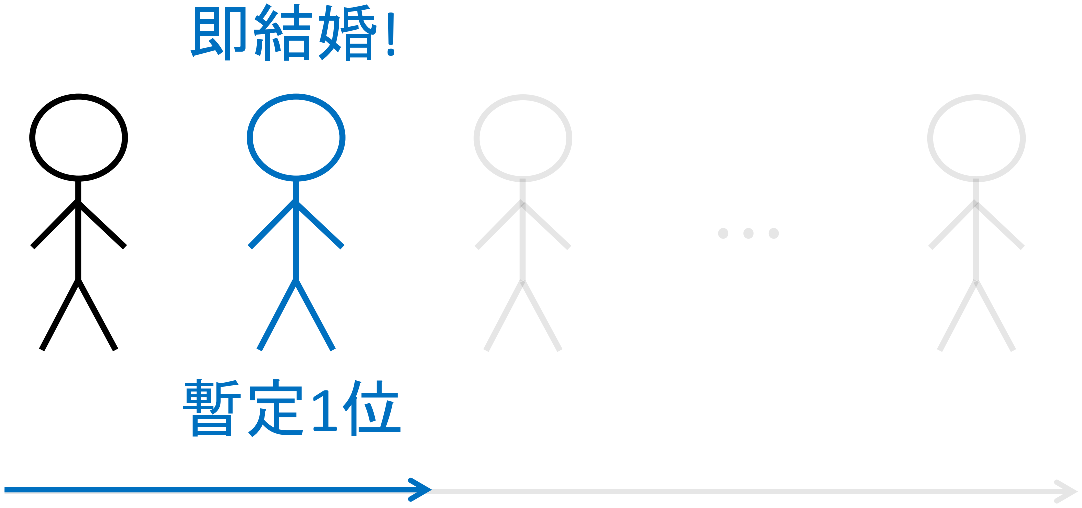
結婚問題 (a.k.a. 秘書問題)

出会いと別れは逐次的



結婚問題 (a.k.a. 秘書問題)

出会いと別れは逐次的



結婚問題 (a.k.a. 秘書問題)

出会いと別れは逐次的

結婚問題 (a.k.a. 秘書問題)

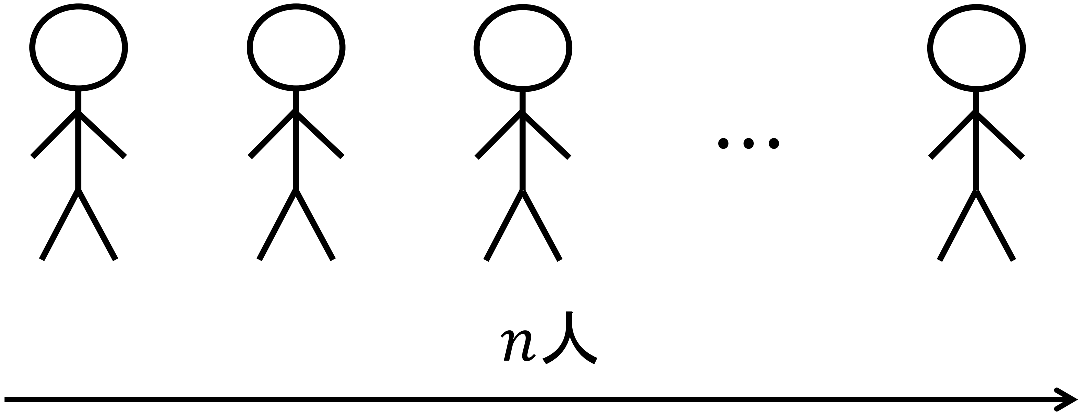
出会いと別れは逐次的

いつ結婚を決断すればいいのか??

結婚問題 (a.k.a. 秘書問題)

n: 自然数 (既知)

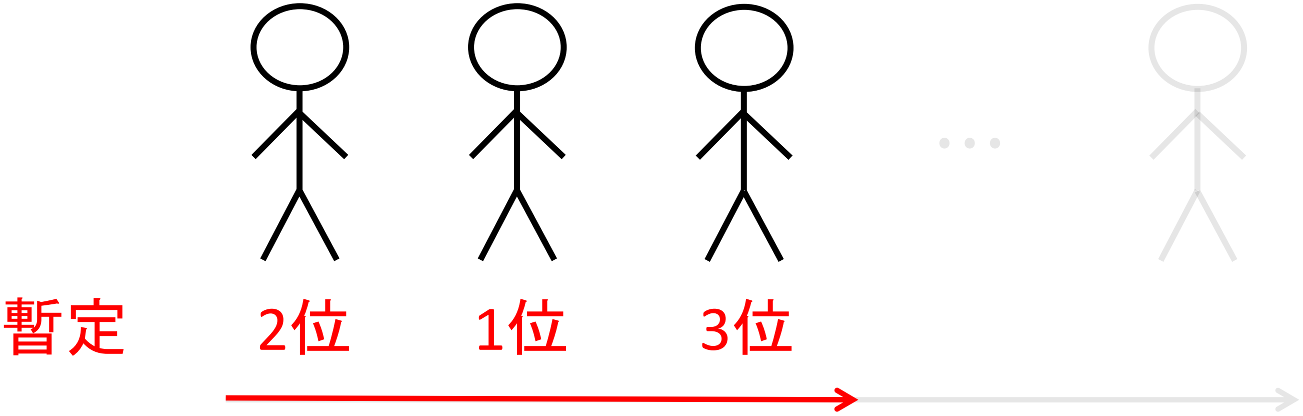
- n人の候補者が**一様ランダム**な順番で現れる



結婚問題 (a.k.a. 秘書問題)

n: 自然数 (既知)

- n人の候補者が**一様ランダム**な順番で現れる
- 候補者が現れると，既に現れた候補者の中での**相対順位**が明らかになる (予め全順序が定まっている)



結婚問題 (a.k.a. 秘書問題)

n: 自然数 (既知)

- n人の候補者が**一様ランダム**な順番で現れる
- 候補者が現れると，既に現れた候補者の中での
  相対順位が明らかになる (予め全順序が定まっている)
- 候補者が現れるたびに，
  即座に「見送る」か「結婚する」を選ばなければならず，
  一度行った選択は覆せない

※ただし相手の意向は無視できるものとする

結婚問題 (a.k.a. 秘書問題)

願望1: 全体で見て1位の人と結婚したい

結婚問題 (a.k.a. 秘書問題)

願望1: 全体で見て1位の人と結婚したい

全体の 1/e 程度を無条件で見送り,
その後暫定1位の候補者が現れたときに結婚すれば,
確率 1/e (≈ 0.3679) **以上**で達成可能 (漸近的に最適)

結婚問題 (a.k.a. 秘書問題)

願望1: 全体で見て1位の人と結婚したい

全体の 1/e 程度を無条件で見送り,
その後暫定1位の候補者が現れたときに結婚すれば,
確率 1/e (≈ 0.3679) **以上**で達成可能 (漸近的に最適)

願望2: 結婚相手の順位の期待値を小さくしたい

上記の戦略だと $n/2e$ **以上** (あまり良くない)
少し工夫すると 3.87 **以下**にできる (漸近的に最適)

[Chow et al. 1964]

1位の人と結婚したい場合

適当なタイミングで相対順位1位の人と結婚するしかない

→ いつ決断すべき??

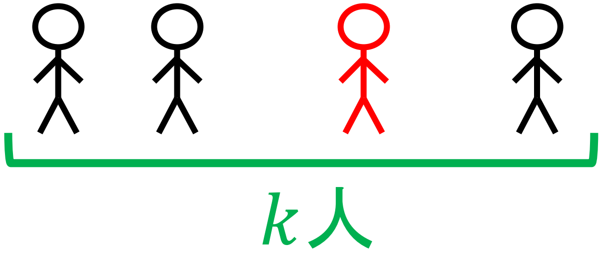
1位の人と結婚したい場合

適当なタイミングで相対順位1位の人と結婚するしかない

→ いつ決断すべき??

k人目 $(0 \le k < n)$ まで見送ることを心に決めるとする

- k人目までに**絶対順位1位の候補者**が現れれば失敗



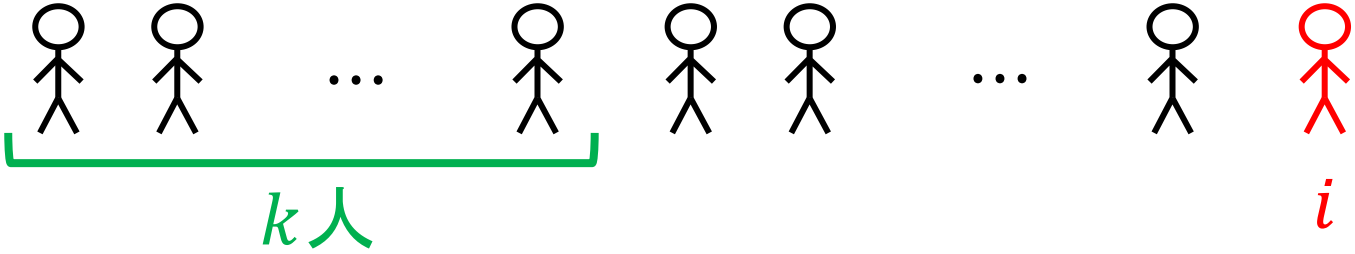
1位の人と結婚したい場合

適当なタイミングで相対順位1位の人と結婚するしかない

→ いつ決断すべき??

k人目 $(0 \le k < n)$ まで見送ることを心に決めるとする

- k人目までに絶対順位1位の候補者が現れれば失敗
- **1位の候補者がi番目** $(k < i \le n)$ に現れるとする

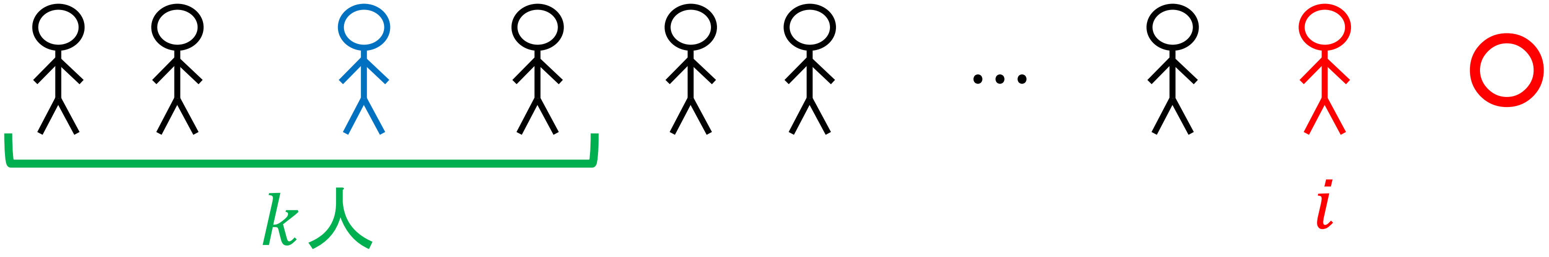


1位の人と結婚したい場合

適当なタイミングで相対順位1位の人と結婚するしかない
→ いつ決断すべき??

k人目 $(0 \le k < n)$ まで見送ることを心に決めるとする

- k人目までに絶対順位1位の候補者が現れれば失敗
- **1位の候補者がi番目** $(k < i \le n)$ に現れるとすると,
  $i-1$**人目までの相対順位1位**がk人目以前なら成功



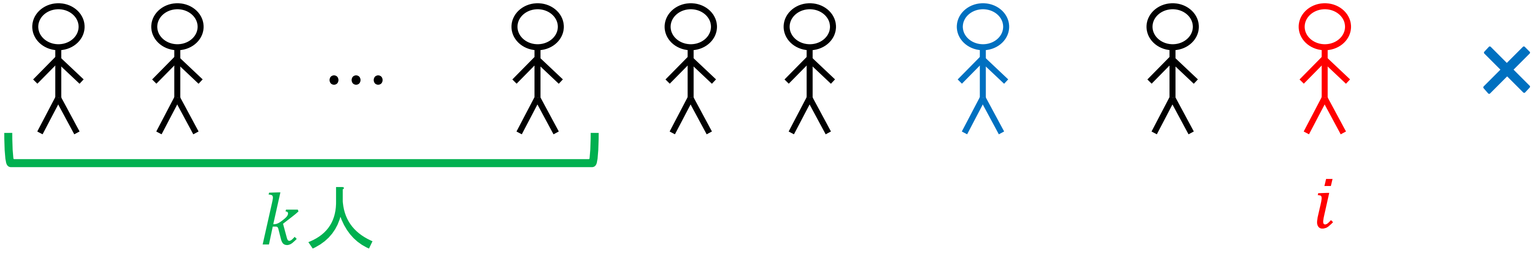
1位の人と結婚したい場合

適当なタイミングで相対順位1位の人と結婚するしかない

→ いつ決断すべき??

k人目 $(0 \leq k < n)$ まで見送ることを心に決めるとする

- k人目までに絶対順位1位の候補者が現れれば失敗
- **1位の候補者がi番目** $(k < i \leq n)$ に現れるとすると, $i-1$**人目までの相対順位1位**がk人目以前なら成功



1位の人と結婚したい場合

適当なタイミングで相対順位1位の人と結婚するしかない

→ いつ決断すべき??

k人目 $(0 \le k < n)$ まで見送ることを心に決めるとする

- k人目までに絶対順位1位の候補者が現れれば失敗
- **1位の候補者がi番目** $(k < i \le n)$ に現れるとすると, $i-1$**人目までの相対順位1位**がk人目以前なら成功

$$(\text{成功確率}) = \frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{k}{i-1}$$

1位の人と結婚したい場合

適当なタイミングで相対順位1位の人と結婚するしかない

→ いつ決断すべき??

k人目 $(0 \leq k < n)$ まで見送ることを心に決めるとする

$$(\text{成功確率}) = \frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{k}{i-1} = \frac{k}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i-1}$$

$$\geq \frac{k}{n}\int_{k}^{n}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\frac{k}{n}\log\frac{k}{n}$$

1位の人と結婚したい場合

適当なタイミングで相対順位1位の人と結婚するしかない

→ いつ決断すべき??

k人目 $(0 \leq k < n)$ まで見送ることを心に決めるとする

$$(\text{成功確率}) = \frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{k}{i-1} = \frac{k}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i-1}$$

$$\geq \frac{k}{n}\int_{k}^{n}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \boxed{-\frac{k}{n}\log\frac{k}{n}}$$

$\frac{k}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$で

最大値 $\frac{1}{\mathrm{e}}$

結婚問題 (a.k.a. 秘書問題)

願望1: 全体で見て1位の人と結婚したい

全体の $1/\mathrm{e}$ 程度を無条件で見送り,
その後暫定1位の候補者が現れたときに結婚すれば,
確率 $1/\mathrm{e}$ (≈ 0.3679) **以上**で達成可能 (漸近的に最適)

願望2: 結婚相手の順位の期待値を小さくしたい

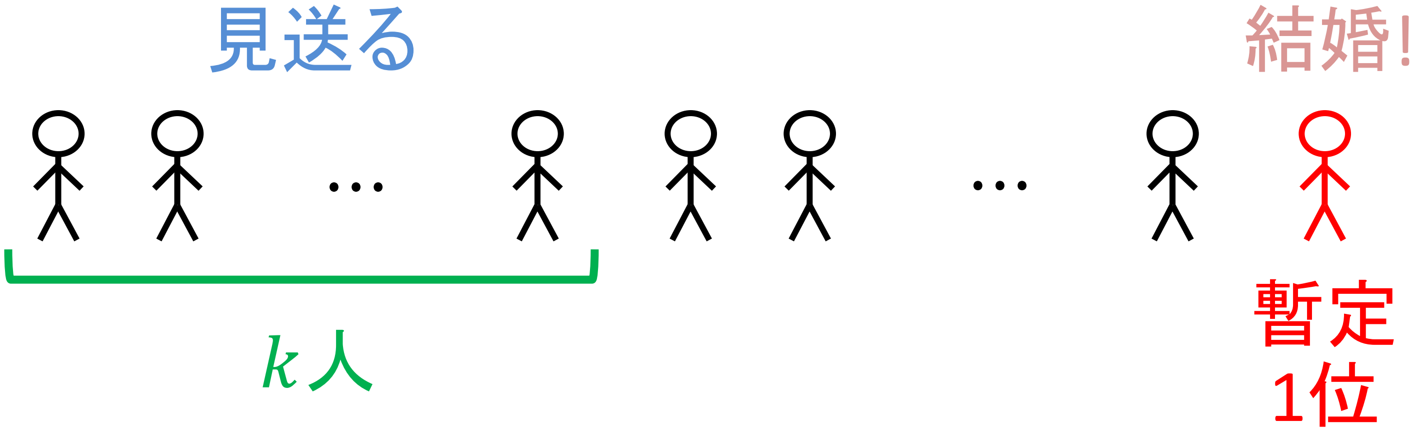
上記の戦略だと $n/2\mathrm{e}$ **以上** (あまり良くない)
少し工夫すると 3.87 **以下**にできる (漸近的に最適)

[Chow et al. 1964]

期待順位を小さくしたい場合

先ほどと同じ戦略を取るとどうなるか??

- k人目まで見送る $\left(\frac{k}{n} \approx \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$
- それ以降**相対順位1位**の候補者が現れたら結婚する
- n人目は順位によらず見送らない



期待順位を小さくしたい場合

先ほどと同じ戦略を取るとどうなるか??

- k人目まで**見送る** $\left(\frac{k}{n} \approx \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$
- それ以降**相対順位1位**の候補者が現れたら**結婚する**
- n人目は順位によらず見送らない

k人目までに1位の候補者が居た場合，必ずn人目と結婚

$$(\text{期待順位}) \geq \frac{k}{n} \cdot \frac{n+2}{2} \approx \frac{n+2}{2\mathrm{e}}$$

期待順位を小さくしたい場合

- 残り1人になると，結婚するしかない

$$(\text{期待順位}) = \frac{n+1}{2}$$

期待順位を小さくしたい場合

- 残り1人になると，結婚するしかない

$$(\text{期待順位}) = \frac{n+1}{2}$$

- 最後から2人目が暫定i位 $(1 \leq i \leq n-1)$ だった場合
  - 絶対順位の期待値は $\frac{n-i}{n} i + \frac{i}{n}(i+1) = \frac{n+1}{n} i$
  - 見送れば，最後の1人と結婚 (期待順位は $\frac{n+1}{2}$)

期待順位を小さくしたい場合

- 残り1人になると，結婚するしかない

$$(\text{期待順位}) = \frac{n+1}{2}$$

- 最後から2人目が暫定i位 $(1 \leq i \leq n-1)$ だった場合
  - 絶対順位の期待値は $\frac{n-i}{n} i + \frac{i}{n}(i+1) = \frac{n+1}{n} i$
  - 見送れば，最後の1人と結婚 (期待順位は $\frac{n+1}{2}$)

  → $i \leq \frac{n}{2}$ なら**結婚**，そうでなければ**見送る**

期待順位を小さくしたい場合

- 最後から2人目が暫定i位 $(1 \leq i \leq n-1)$ だった場合
  - 絶対順位の期待値は $\frac{n-i}{n} i + \frac{i}{n}(i+1) = \frac{n+1}{n} i$
  - 見送れば，最後の1人と結婚 (期待順位は $\frac{n+1}{2}$)

→ $i \leq \frac{n}{2}$ なら**結婚**，そうでなければ**見送る**

$$(\text{期待順位}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \min\left\{\frac{n+1}{n} i, \quad \frac{n+1}{2}\right\}$$

期待順位を小さくしたい場合

- 最後から3人目が暫定i位 $(1 \leq i \leq n-2)$ だった場合
  - 絶対順位の期待値 $pi + q(i+1) + r(i+2)$ は **解析的に計算可能** $(p+q+r=1)$
  - 見送れば，**前述の期待順位を達成可能**

繰り返し遡っていくと…

$$(\text{達成可能な期待順位}) \leq \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j+2}{j}\right)^{\frac{1}{j+1}} \approx 3.8695\ldots$$

[Chow et al. 1964]

期待順位を小さくしたい場合

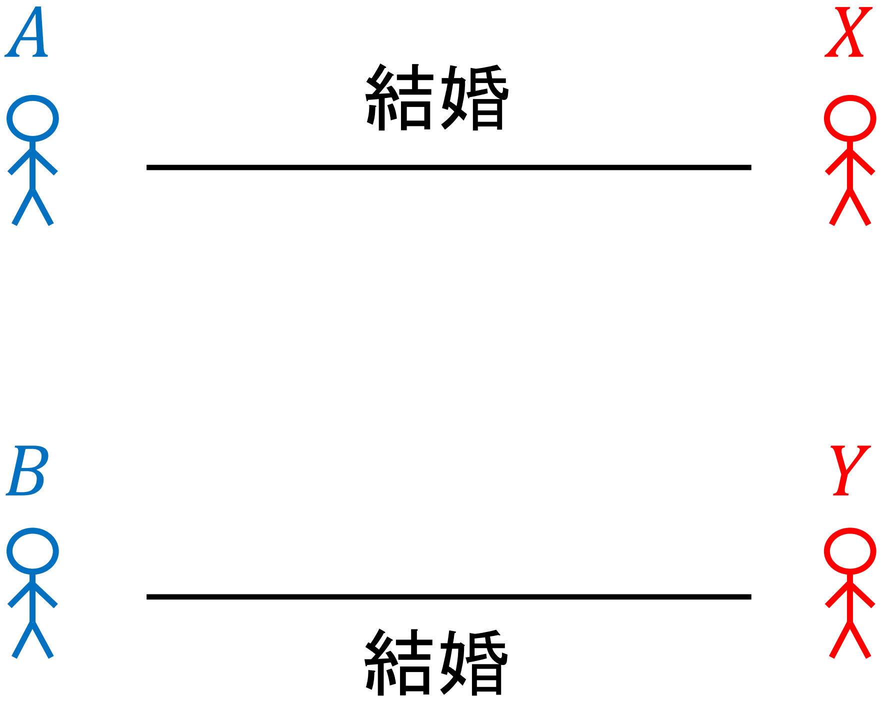
例 $n = 20$ の場合の最適戦略

- 5人目までは無条件で見送る
- 6～10人目は**暫定1位**なら結婚する
- 11～13人目は**暫定2位以内**なら結婚する
- 14, 15人目は**暫定3位以内**なら結婚する
- 16, 17, 18, 19人目は,
  それぞれ**暫定4, 5, 7, 10位以内**なら結婚する

全体の構成

- 個人が幸せになるためには
  - 1番好きな人と結婚できる確率を上げる
  - 結婚相手の順位の期待値を下げる
- 安定な結婚とは
  - 駆け落ちが起こらないカップリング
  - 絶望の定理 (田舎の病院定理)
  - 嘘つきは得をするか

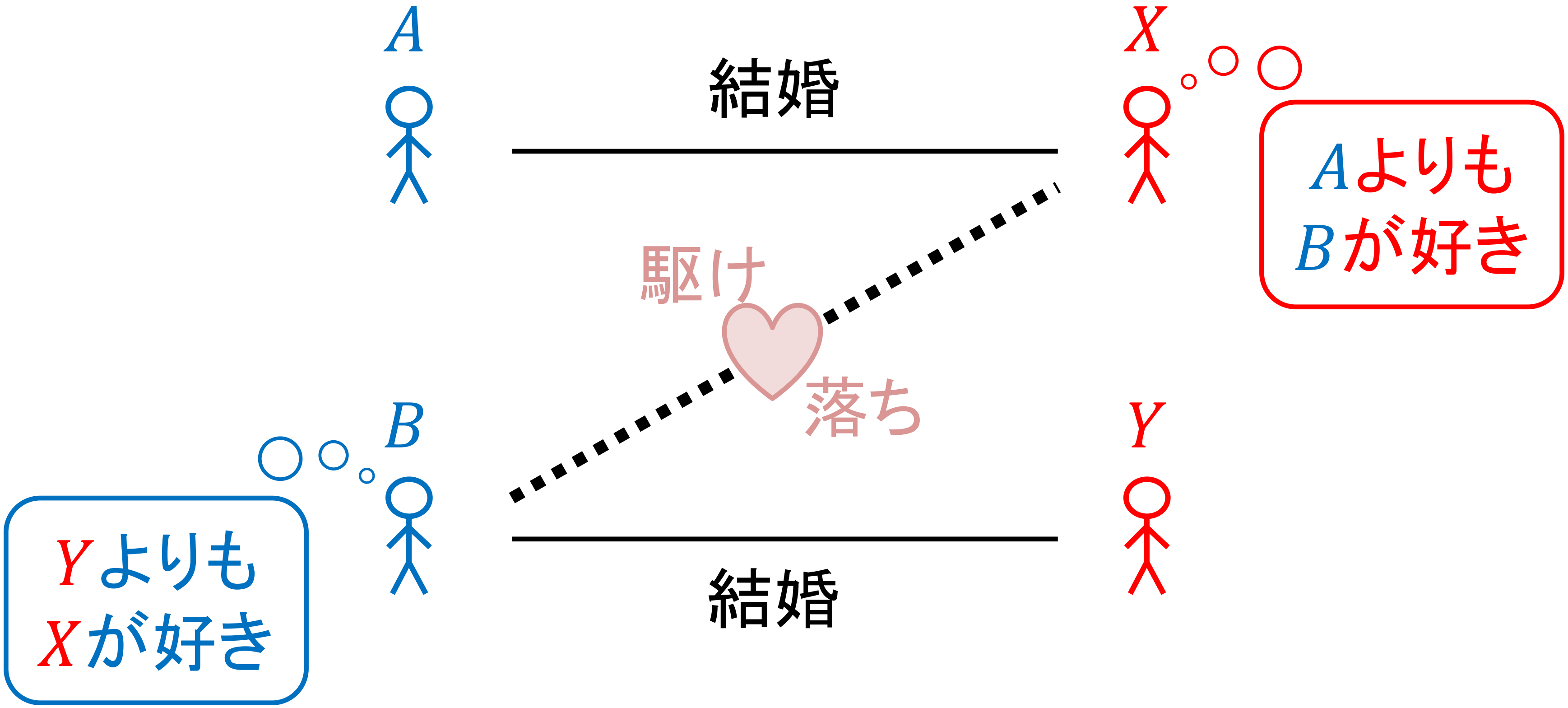
駆け落ち



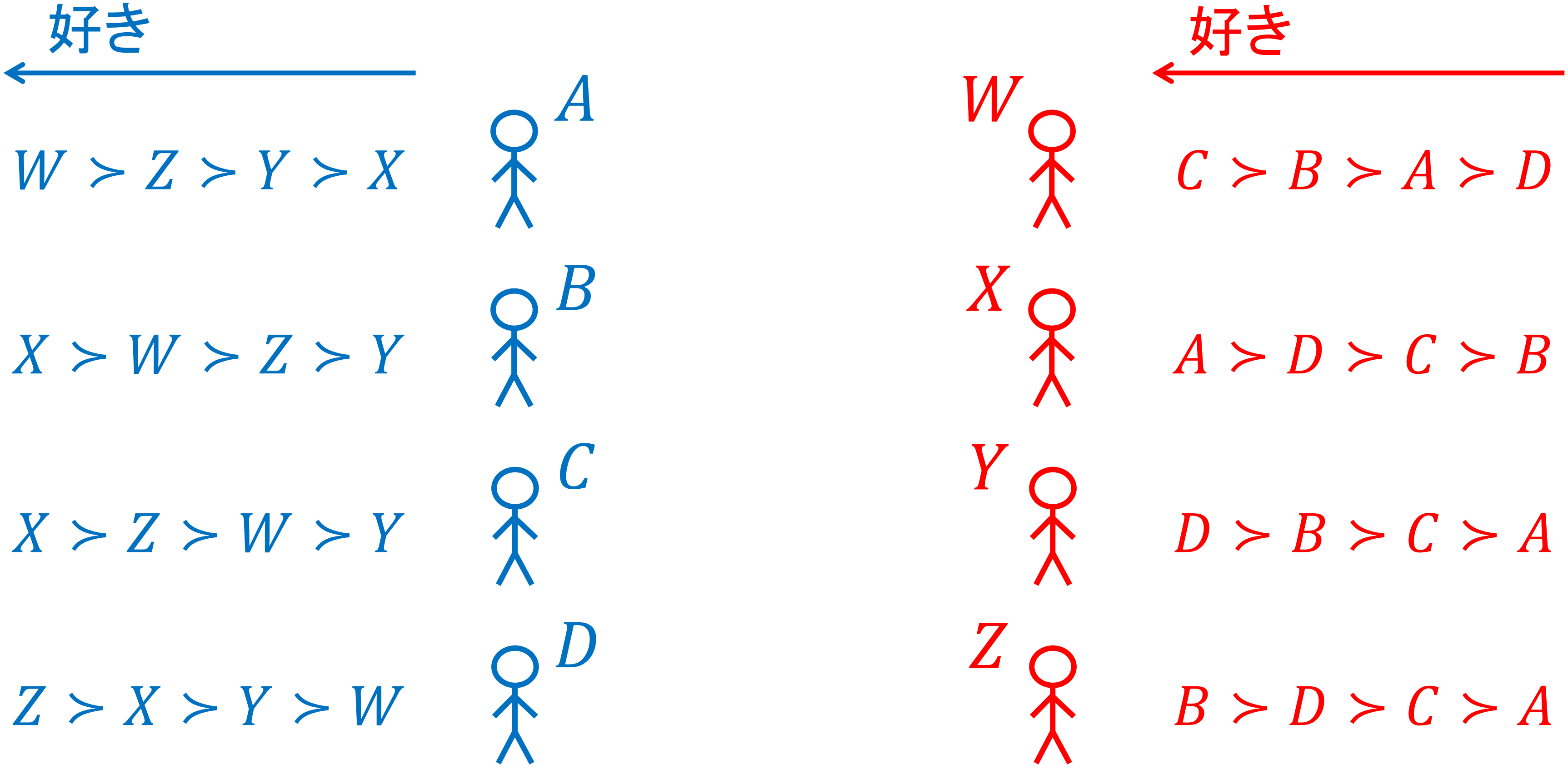
A 結婚 X

B 結婚 Y

駆け落ち



安定結婚問題



好き

好き

A: $W \succ Z \succ Y \succ X$

B: $X \succ W \succ Z \succ Y$

C: $X \succ Z \succ W \succ Y$

D: $Z \succ X \succ Y \succ W$

W: $C \succ B \succ A \succ D$

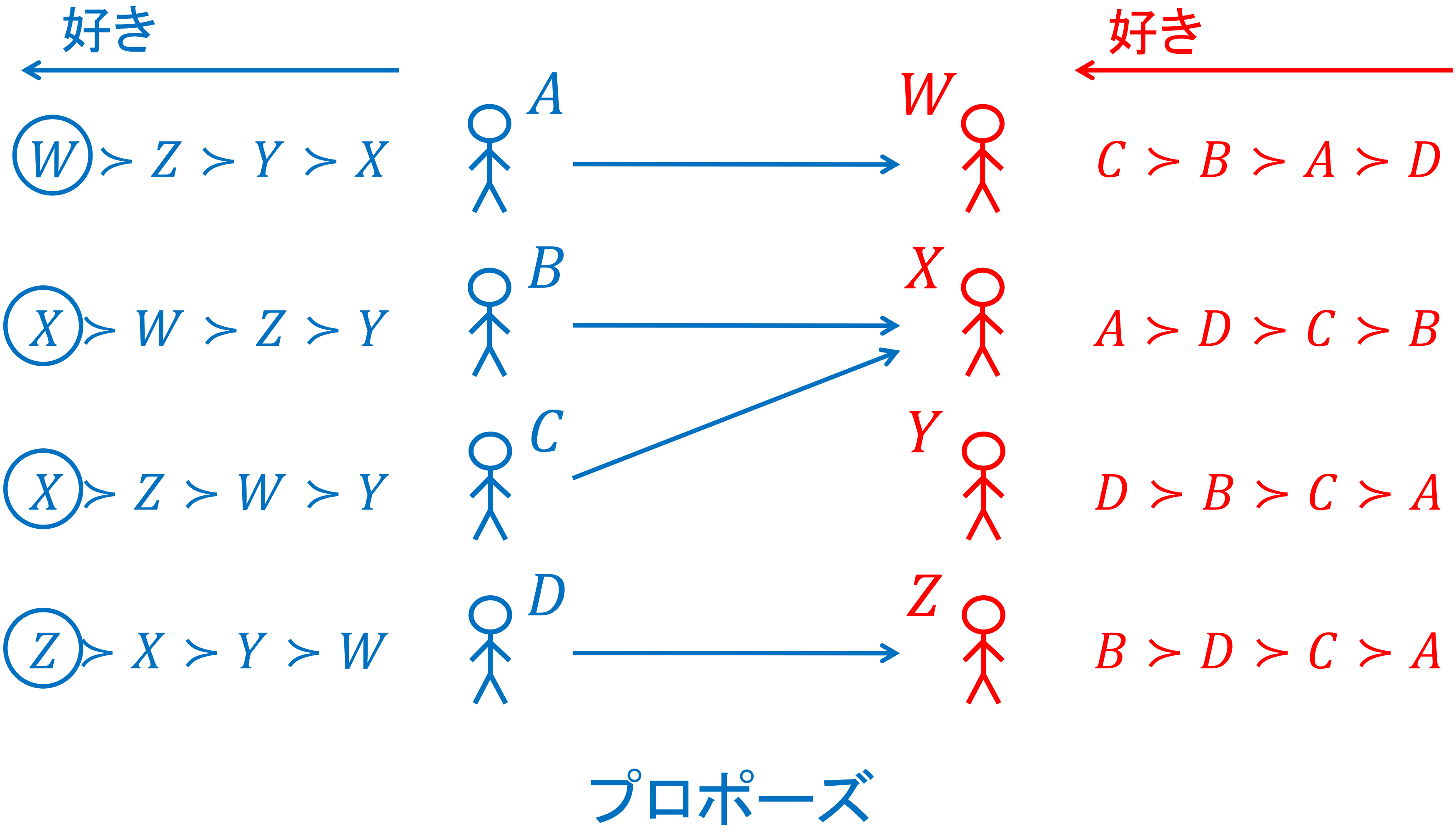
X: $A \succ D \succ C \succ B$

Y: $D \succ B \succ C \succ A$

Z: $B \succ D \succ C \succ A$

駆け落ちしないようにカップリングしたい

安定結婚問題



$\textcircled{W} \succ Z \succ Y \succ X$

$\textcircled{X} \succ W \succ Z \succ Y$

$\textcircled{X} \succ Z \succ W \succ Y$

$\textcircled{Z} \succ X \succ Y \succ W$

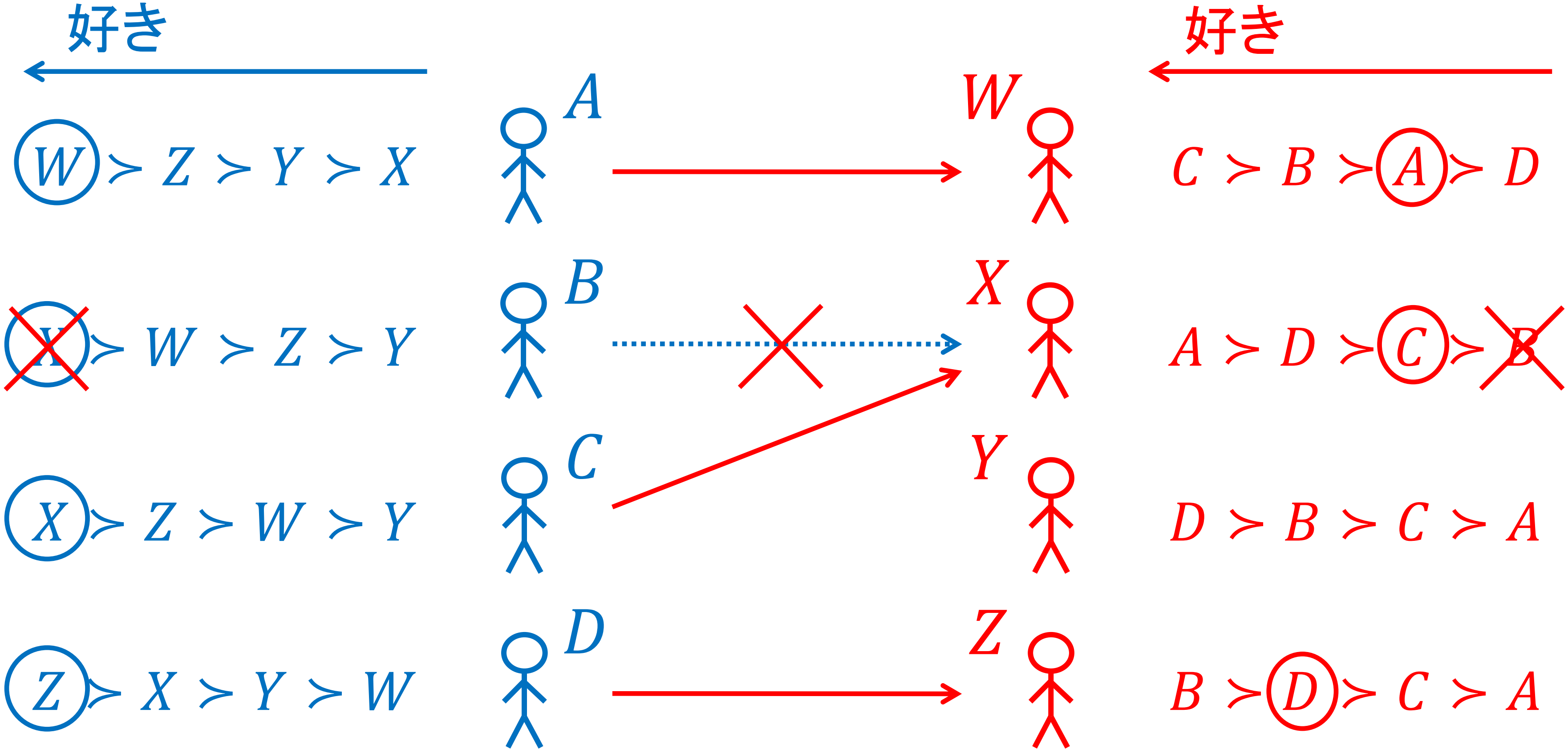
$C \succ B \succ A \succ D$

$A \succ D \succ C \succ B$

$D \succ B \succ C \succ A$

$B \succ D \succ C \succ A$

安定結婚問題



$W \succ Z \succ Y \succ X$

$\cancel{X} \succ W \succ Z \succ Y$

$X \succ Z \succ W \succ Y$

$Z \succ X \succ Y \succ W$

$C \succ B \succ A \succ D$

$A \succ D \succ C \succ \cancel{B}$

$D \succ B \succ C \succ A$

$B \succ D \succ C \succ A$

仮受諾・拒否

安定結婚問題

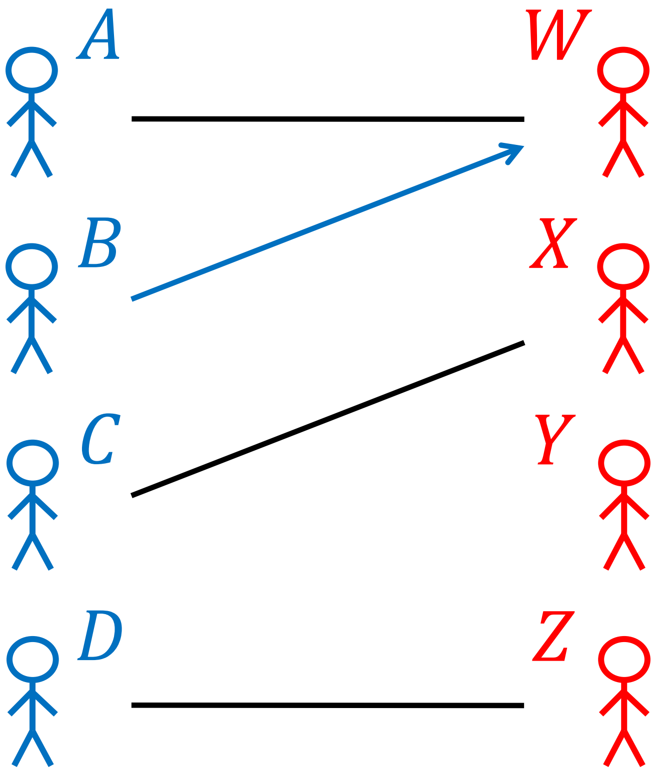
好き ←

$\enclose{circle}{W} \succ Z \succ Y \succ X$

$\cancel{X} \succ \enclose{circle}{W} \succ Z \succ Y$

$\enclose{circle}{X} \succ Z \succ W \succ Y$

$\enclose{circle}{Z} \succ X \succ Y \succ W$



好き ←

$C \succ B \succ \enclose{circle}{A} \succ D$

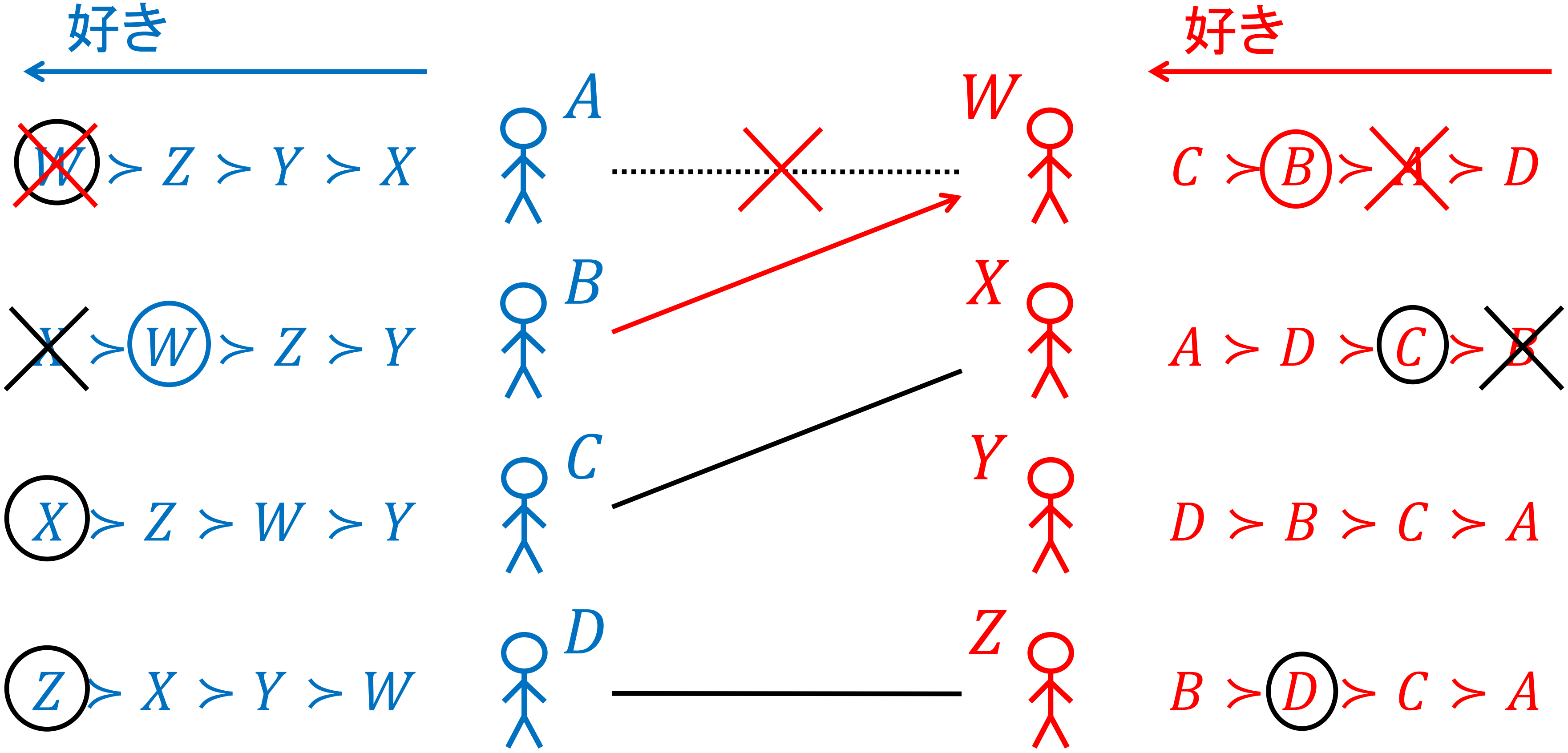
$A \succ D \succ \enclose{circle}{C} \succ \cancel{B}$

$D \succ B \succ C \succ A$

$B \succ \enclose{circle}{D} \succ C \succ A$

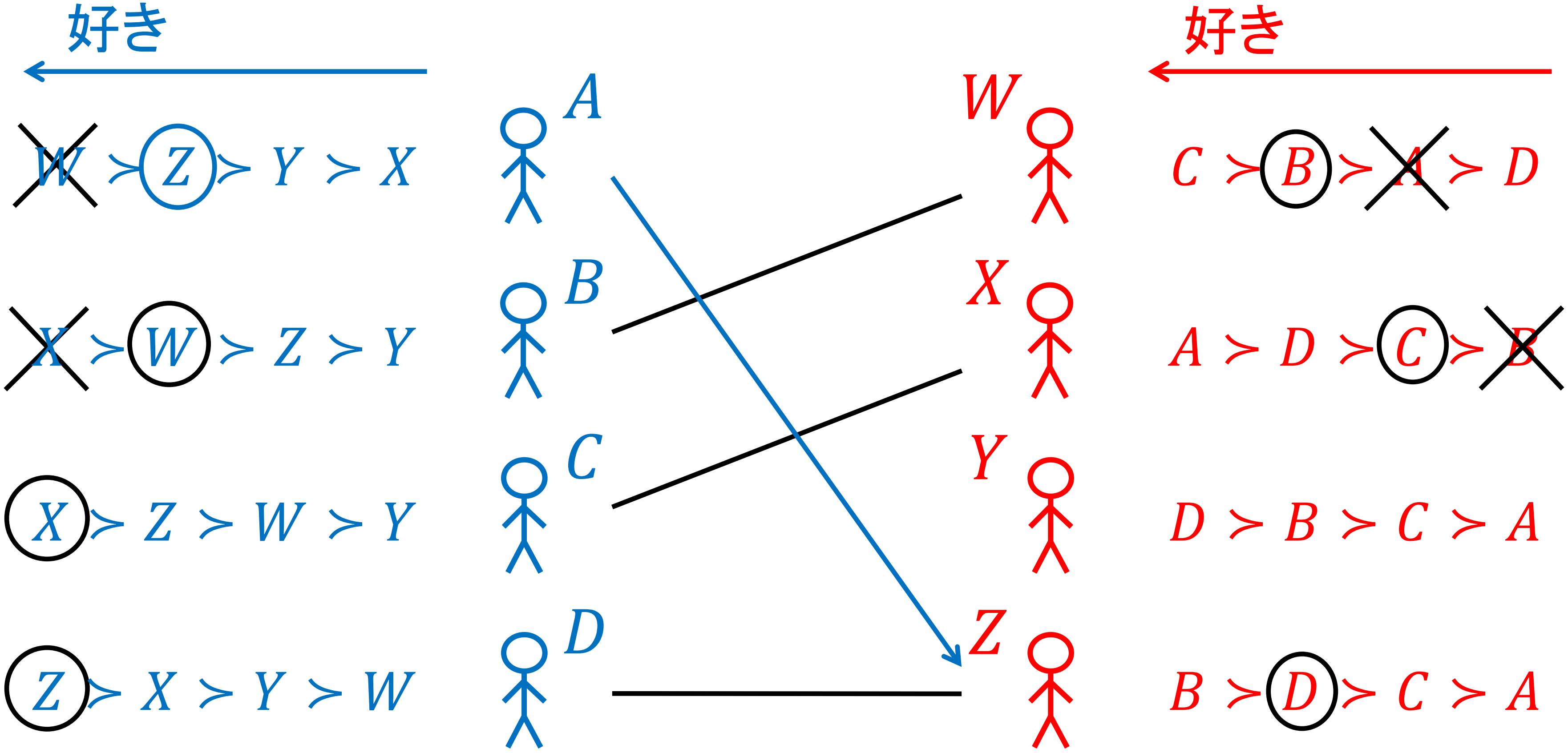
プロポーズ

安定結婚問題



仮受諾・拒否

安定結婚問題



$\cancel{W} \succ \textcircled{Z} \succ Y \succ X$

$\cancel{X} \succ \textcircled{W} \succ Z \succ Y$

$\textcircled{X} \succ Z \succ W \succ Y$

$\textcircled{Z} \succ X \succ Y \succ W$

$C \succ \textcircled{B} \succ \cancel{A} \succ D$

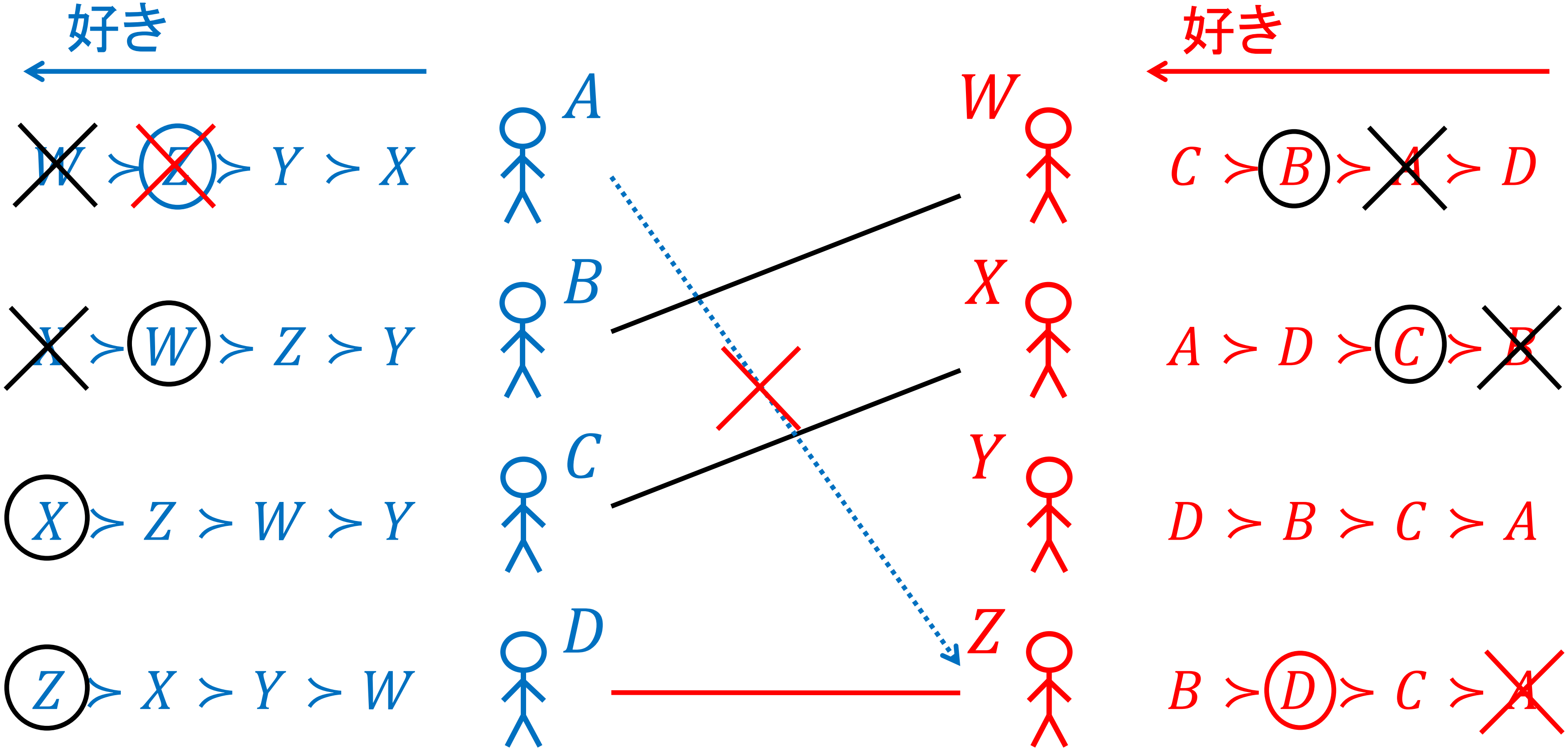
$A \succ D \succ \textcircled{C} \succ \cancel{B}$

$D \succ B \succ C \succ A$

$B \succ \textcircled{D} \succ C \succ A$

プロポーズ

安定結婚問題



$\cancel{W} \succ \cancel{\enclose{circle}{Z}} \succ Y \succ X$

$\cancel{X} \succ \enclose{circle}{W} \succ Z \succ Y$

$\enclose{circle}{X} \succ Z \succ W \succ Y$

$\enclose{circle}{Z} \succ X \succ Y \succ W$

$C \succ \enclose{circle}{B} \succ \cancel{A} \succ D$

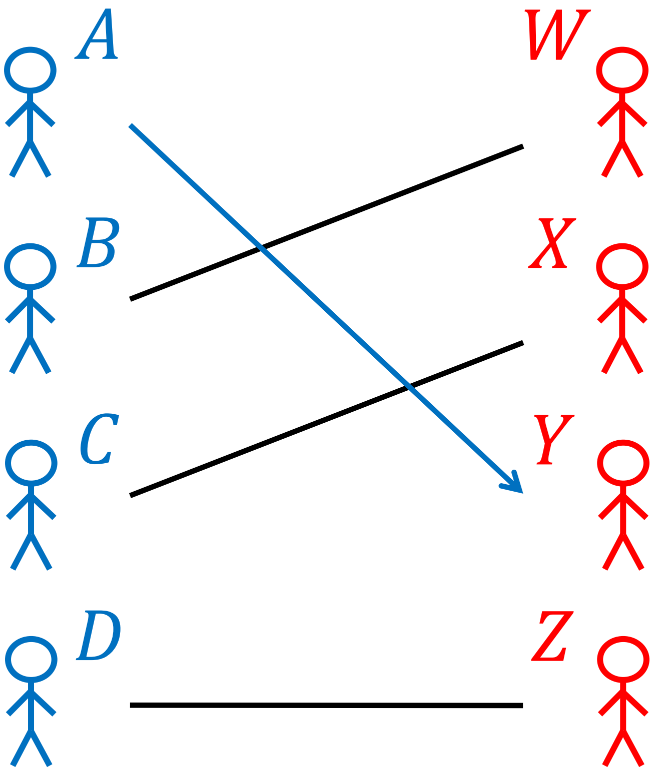
$A \succ D \succ \enclose{circle}{C} \succ \cancel{B}$

$D \succ B \succ C \succ A$

$B \succ \enclose{circle}{D} \succ C \succ \cancel{A}$

仮受諾・拒否

安定結婚問題



好き ←

$\cancel{W} \succ \cancel{Z} \succ \textcircled{Y} \succ X$

$\cancel{X} \succ \textcircled{W} \succ Z \succ Y$

$\textcircled{X} \succ Z \succ W \succ Y$

$\textcircled{Z} \succ X \succ Y \succ W$

好き ←

$C \succ \textcircled{B} \succ \cancel{A} \succ D$

$A \succ D \succ \textcircled{C} \succ \cancel{B}$

$D \succ B \succ C \succ A$

$B \succ \textcircled{D} \succ C \succ \cancel{A}$

プロポーズ

安定結婚問題

好き ←

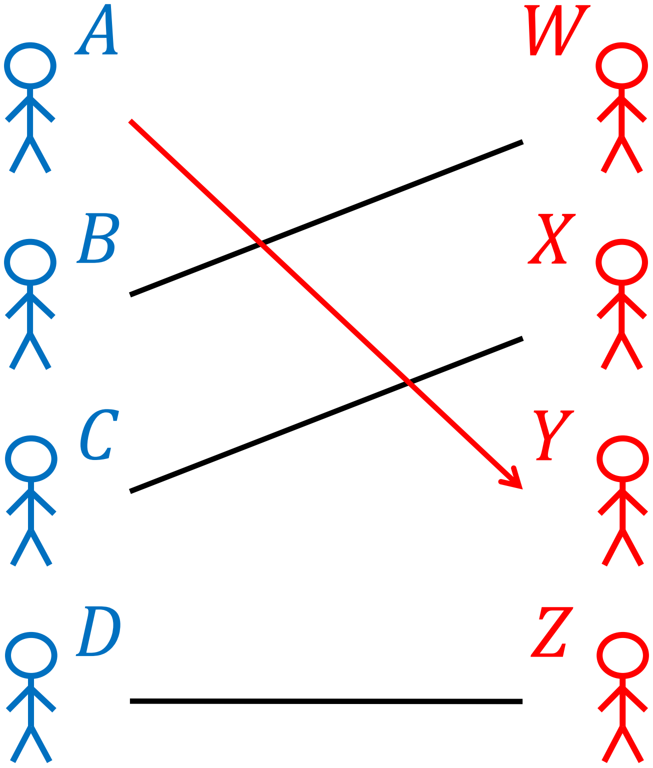
好き ←

$\cancel{W} \succ \cancel{Z} \succ \enclose{circle}{Y} \succ X$

$\cancel{X} \succ \enclose{circle}{W} \succ Z \succ Y$

$\enclose{circle}{X} \succ Z \succ W \succ Y$

$\enclose{circle}{Z} \succ X \succ Y \succ W$



$C \succ \enclose{circle}{B} \succ \cancel{A} \succ D$

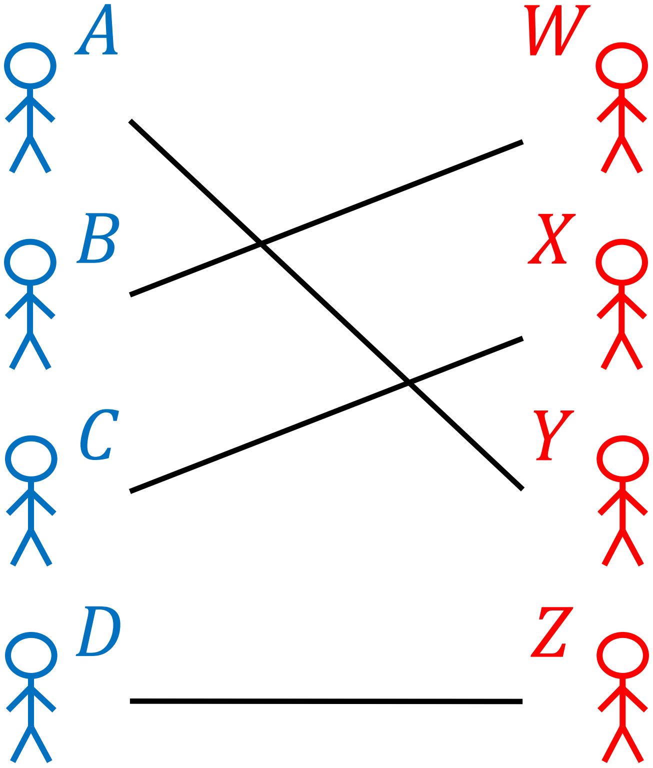
$A \succ D \succ \enclose{circle}{C} \succ \cancel{B}$

$D \succ B \succ C \succ \enclose{circle}{A}$

$B \succ \enclose{circle}{D} \succ C \succ \cancel{A}$

仮受諾・拒否

安定結婚問題



好き ←			好き ←
$\cancel{W} \succ \cancel{Z} \succ \enclose{circle}{Y} \succ X$	A	W	$C \succ \enclose{circle}{B} \succ \cancel{A} \succ D$
$\cancel{X} \succ \enclose{circle}{W} \succ Z \succ Y$	B	X	$A \succ D \succ \enclose{circle}{C} \succ \cancel{B}$
$\enclose{circle}{X} \succ Z \succ W \succ Y$	C	Y	$D \succ B \succ C \succ \enclose{circle}{A}$
$\enclose{circle}{Z} \succ X \succ Y \succ W$	D	Z	$B \succ \enclose{circle}{D} \succ C \succ \cancel{A}$

駆け落ちしないカップリング (安定結婚) になっている

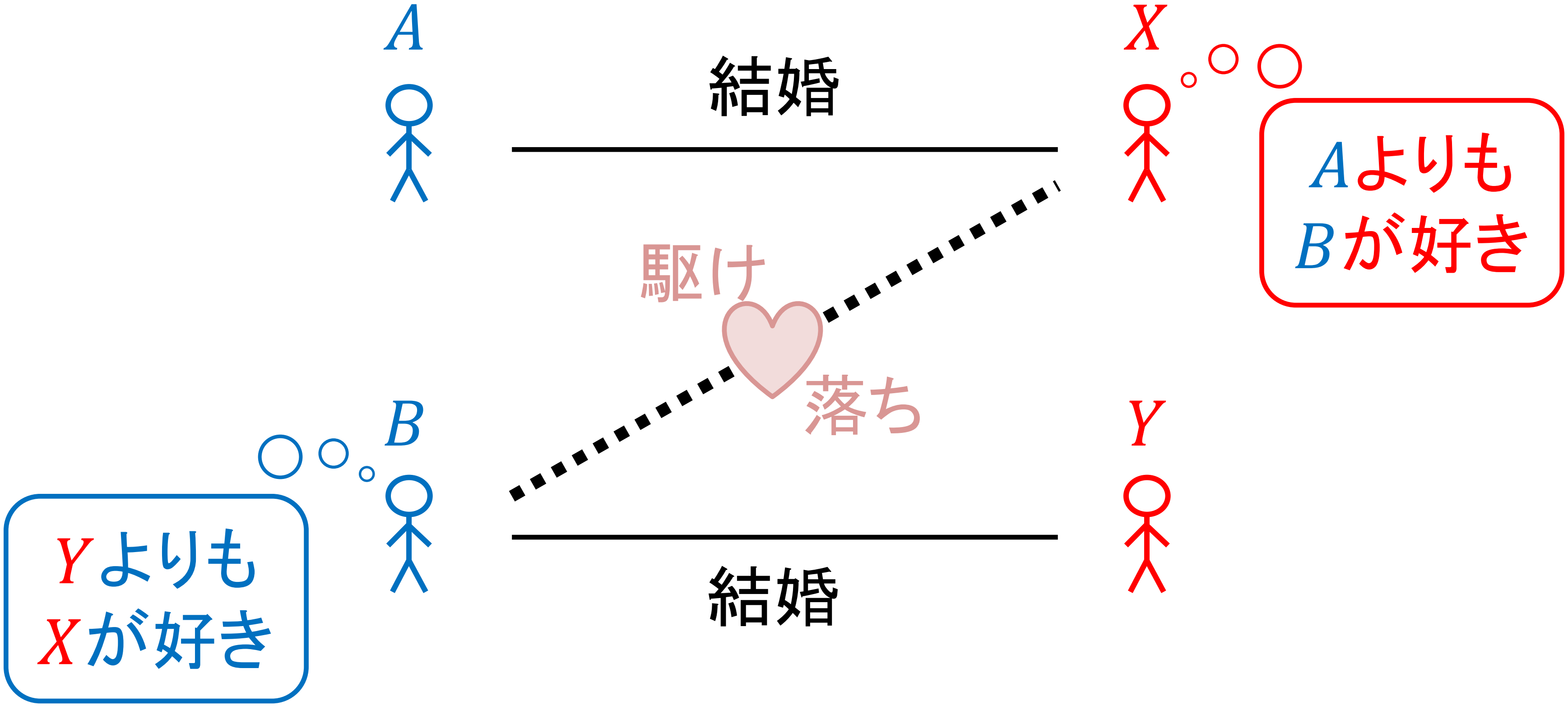
[Gale–Shapley 1962]

Gale–Shapleyアルゴリズム

- 各男性は同じ女性に複数回プロポーズしない
→ 高々 (男性数) × (女性数) 回で終了する

- 必ず安定結婚を見つける
→ 安定結婚の存在を保証

安定性の証明



Aよりも
Bが好き

Yよりも
Xが好き

BはYより先にXに
プロポーズしているはず

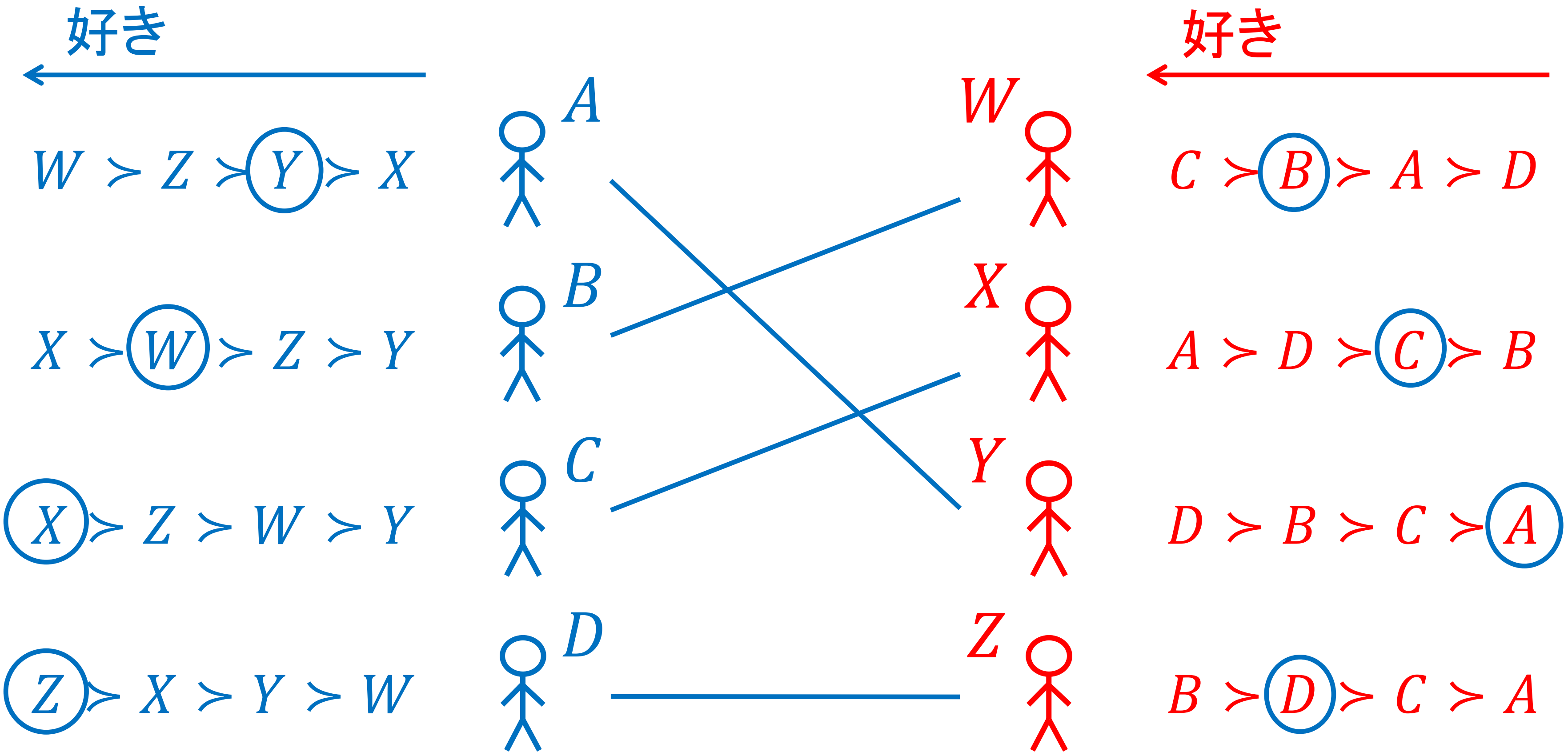
→

XはAより好きなBを
拒絶しないはず

Gale–Shapleyアルゴリズム

- 各男性は同じ女性に複数回プロポーズしない
  → 高々 (男性数) × (女性数) 回で終了する
- 必ず安定結婚を見つける
  → 安定結婚の存在を保証
- 各男性・女性はそれぞれ，安定結婚で結ばれうる中で**最良の女性**・**最悪の男性**とカップリングされている

プロポーズ側の優位性



$W \succ Z \succ \textcircled{Y} \succ X$

$X \succ \textcircled{W} \succ Z \succ Y$

$\textcircled{X} \succ Z \succ W \succ Y$

$\textcircled{Z} \succ X \succ Y \succ W$

$C \succ \textcircled{B} \succ A \succ D$

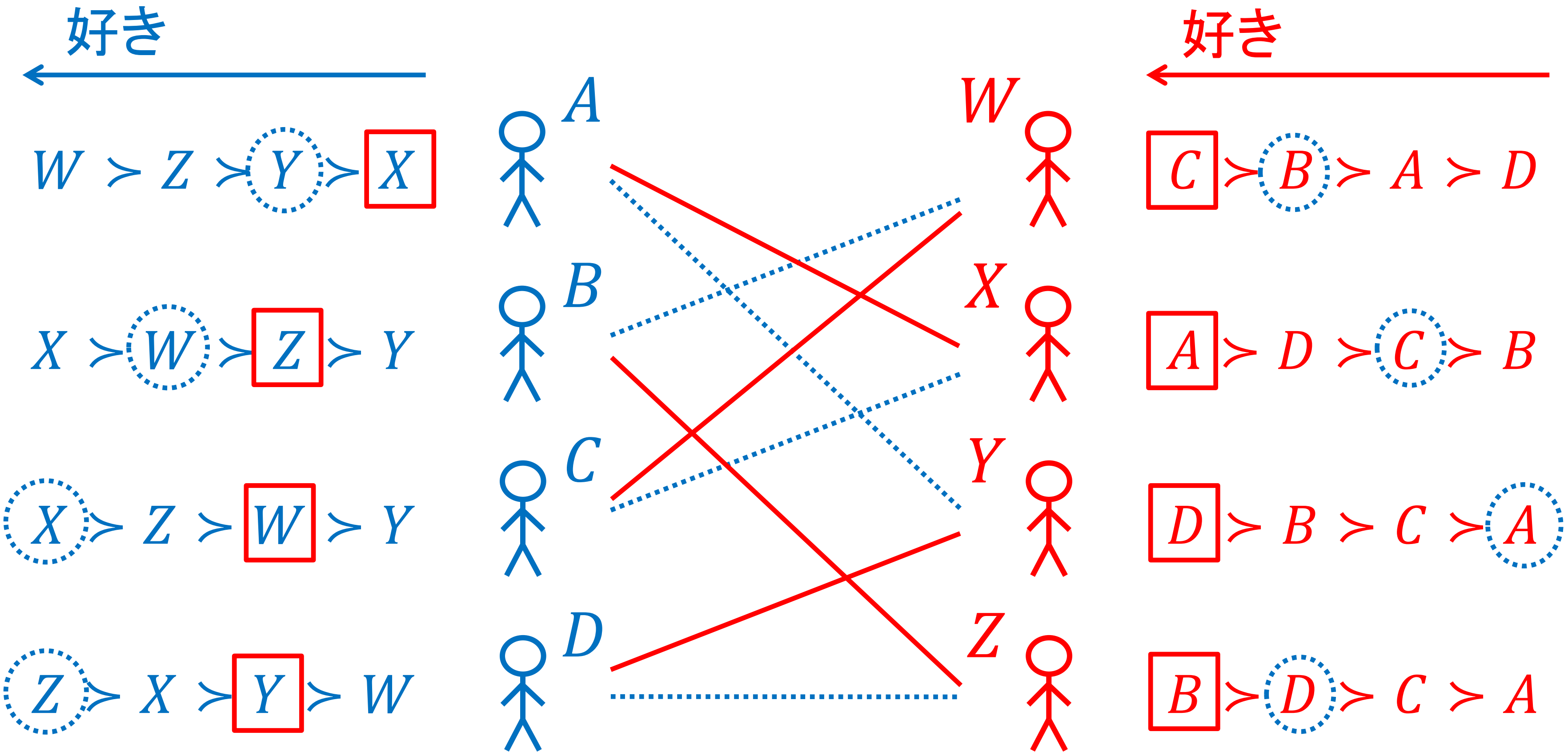
$A \succ D \succ \textcircled{C} \succ B$

$D \succ B \succ C \succ \textcircled{A}$

$B \succ \textcircled{D} \succ C \succ A$

男性側がプロポーズする場合に得られる安定結婚

プロポーズ側の優位性



$W \succ Z \succ Y \succ \boxed{X}$

$X \succ W \succ \boxed{Z} \succ Y$

$X \succ Z \succ \boxed{W} \succ Y$

$Z \succ X \succ \boxed{Y} \succ W$

$\boxed{C} \succ B \succ A \succ D$

$\boxed{A} \succ D \succ C \succ B$

$\boxed{D} \succ B \succ C \succ A$

$\boxed{B} \succ D \succ C \succ A$

女性側がプロポーズする場合に得られる安定結婚

Gale–Shapleyアルゴリズム

- 各男性は同じ女性に複数回プロポーズしない
  → 高々 (男性数) × (女性数) 回で終了する
- 必ず安定結婚を見つける
  → 安定結婚の存在を保証
- 各男性・女性はそれぞれ，安定結婚で結ばれうる中で**最良の女性**・**最悪の男性**とカップリングされている
- 人数が異なる場合，選好リストが不完全な場合，一夫多妻制・多夫多妻制の場合にも上記が成り立つ

全体の構成

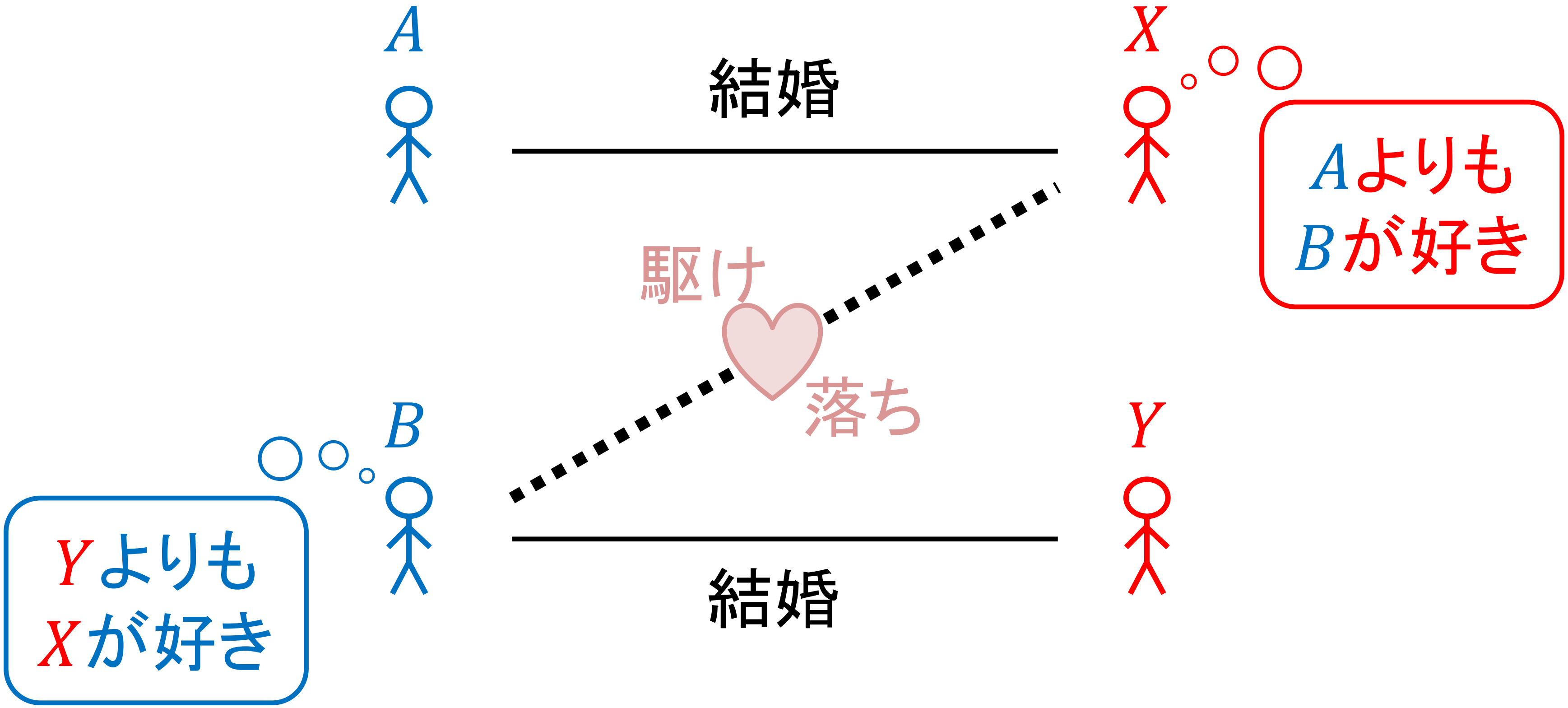
- 個人が幸せになるためには
  - 1番好きな人と結婚できる確率を上げる
  - 結婚相手の順位の期待値を下げる

- 安定な結婚とは
  - 駆け落ちが起こらないカップリング
  - 絶望の定理 (田舎の病院定理)
  - 嘘つきは得をするか

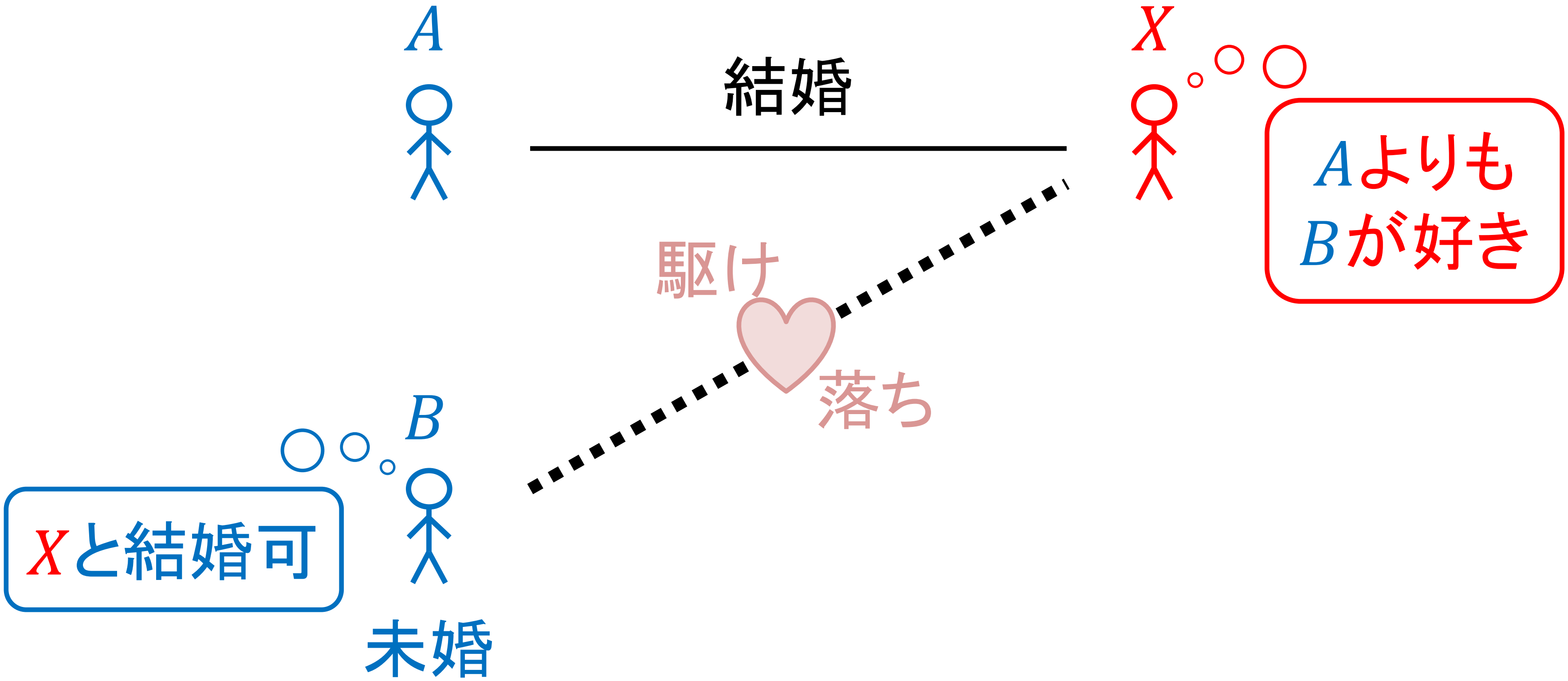
Gale–Shapleyアルゴリズム (再掲)

- 各男性は同じ女性に複数回プロポーズしない
  → 高々 (男性数) × (女性数) 回で終了する
- 必ず安定結婚を見つける
  → 安定結婚の存在を保証
- 各男性・女性はそれぞれ，安定結婚で結ばれうる中で**最良の女性**・**最悪の男性**とカップリングされている
- 人数が異なる場合，選好リストが不完全な場合，一夫多妻制・多夫多妻制の場合にも上記が成り立つ

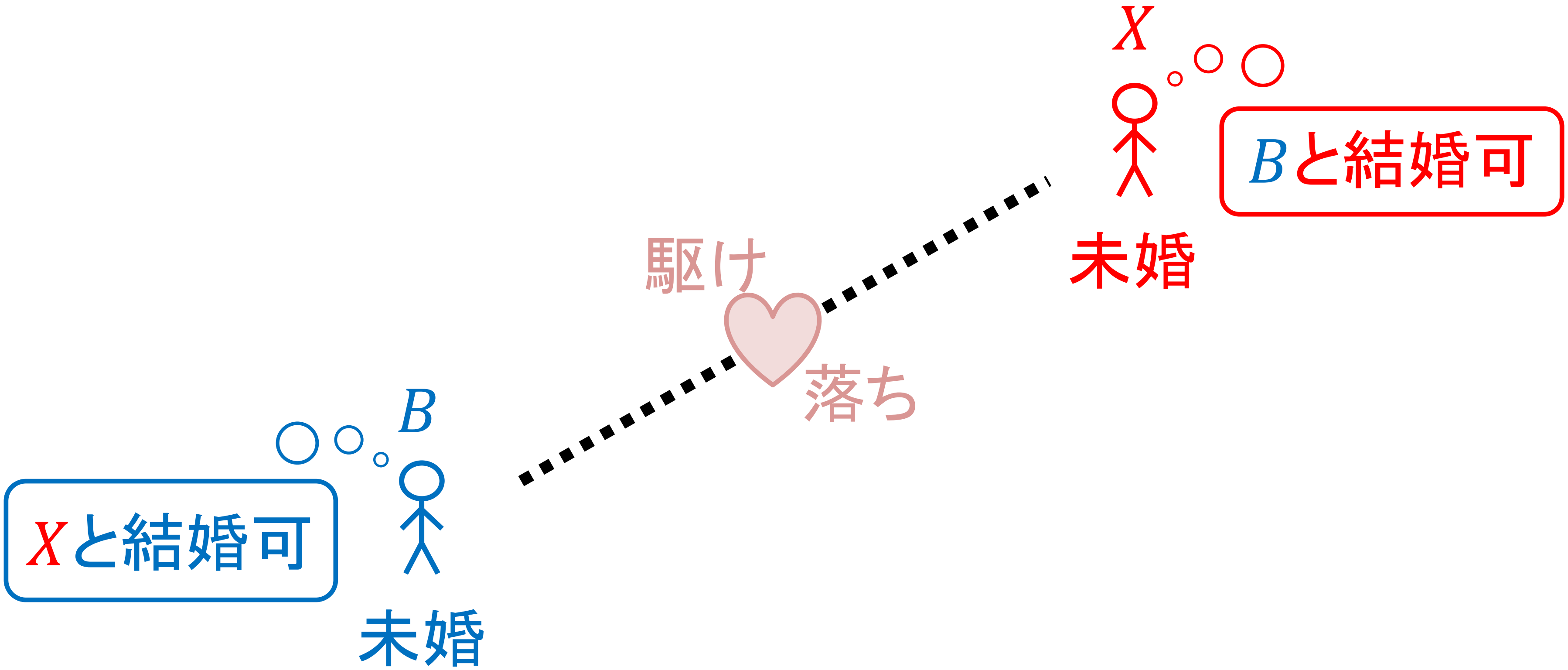
安定性 (駆け落ち) の定義の拡張



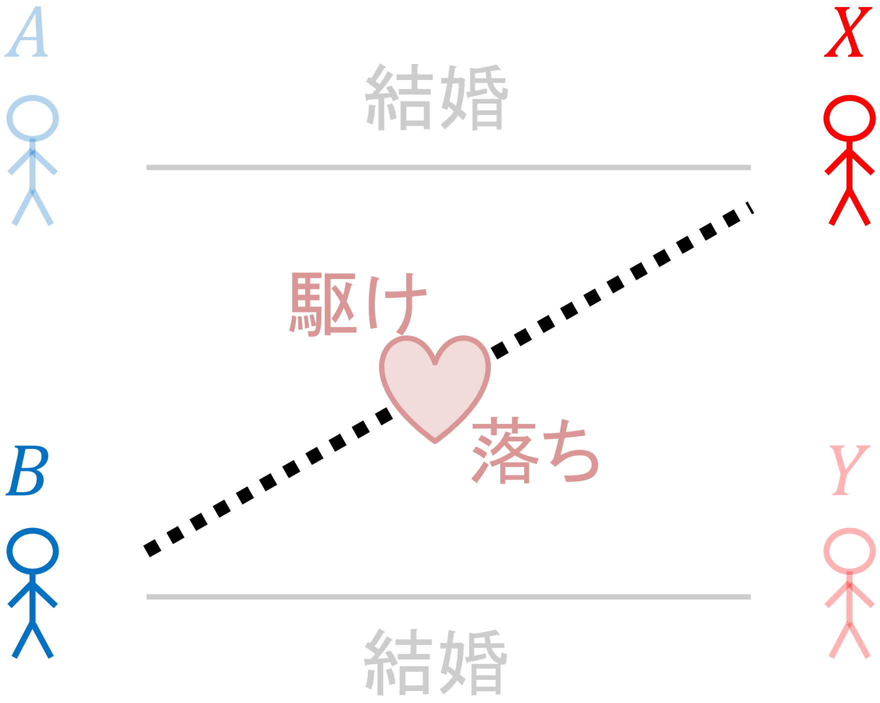
安定性 (駆け落ち) の定義の拡張



安定性 (駆け落ち) の定義の拡張

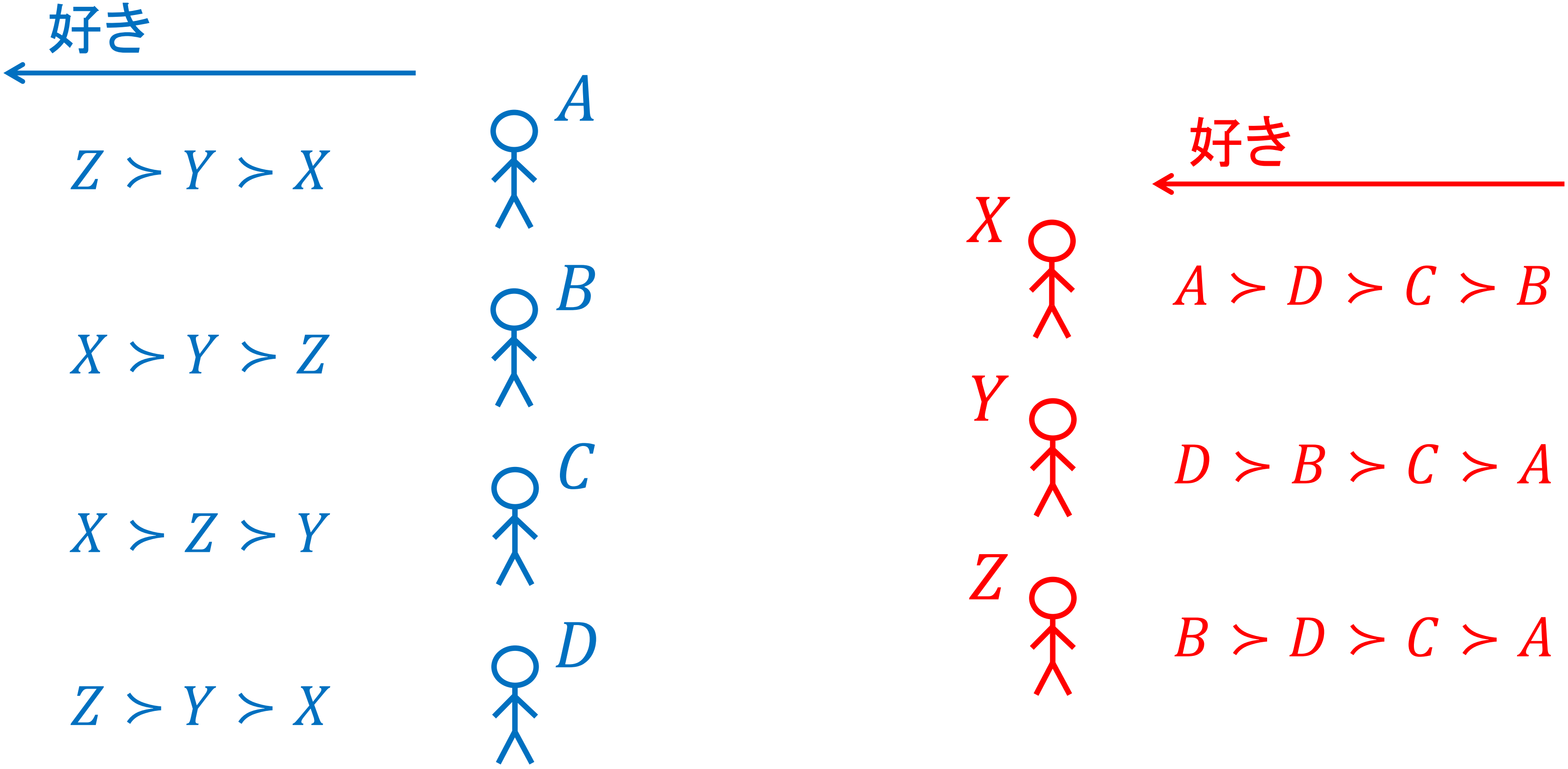


安定性 (駆け落ち) の定義の拡張



安定 $\overset{\text{def}}{\iff}$ どのタイプの駆け落ちも起こらない

人数が異なる場合



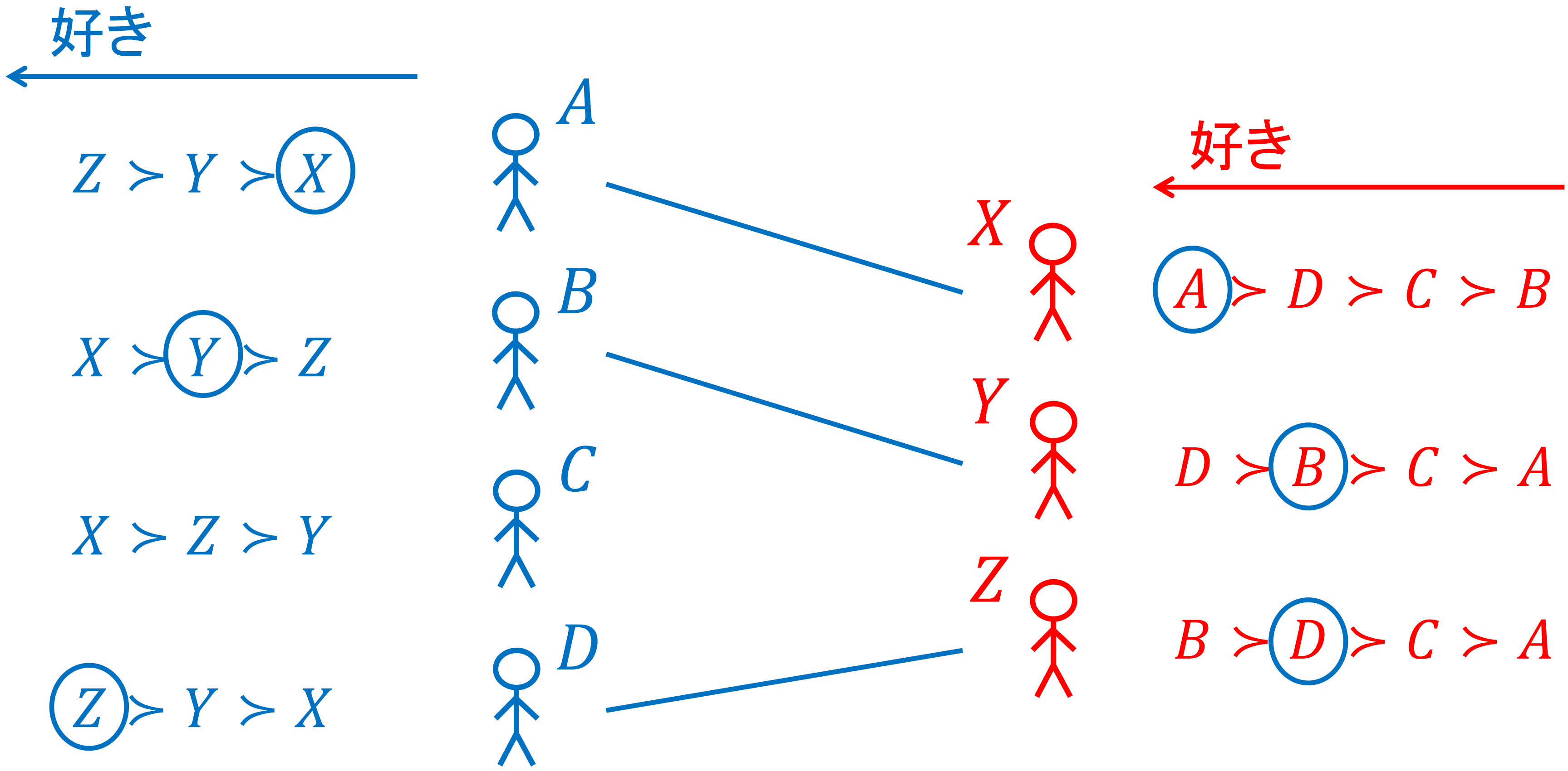
好き

$Z \succ Y \succ X$	A
$X \succ Y \succ Z$	B
$X \succ Z \succ Y$	C
$Z \succ Y \succ X$	D

好き

X	$A \succ D \succ C \succ B$
Y	$D \succ B \succ C \succ A$
Z	$B \succ D \succ C \succ A$

人数が異なる場合



$Z \succ Y \succ \boxed{X}$

$X \succ \boxed{Y} \succ Z$

$X \succ Z \succ Y$

$\boxed{Z} \succ Y \succ X$

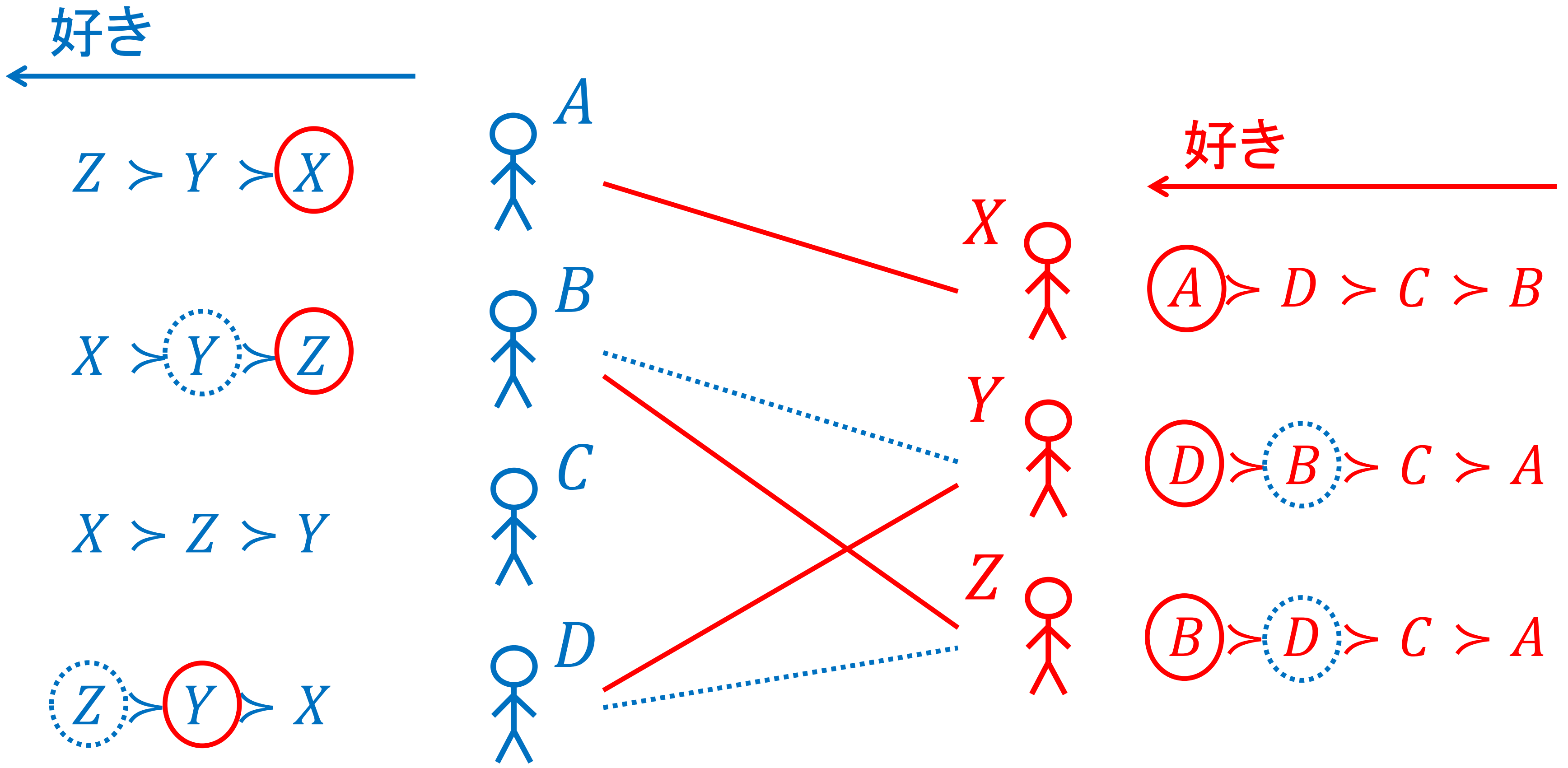
$\boxed{A} \succ D \succ C \succ B$

$D \succ \boxed{B} \succ C \succ A$

$B \succ \boxed{D} \succ C \succ A$

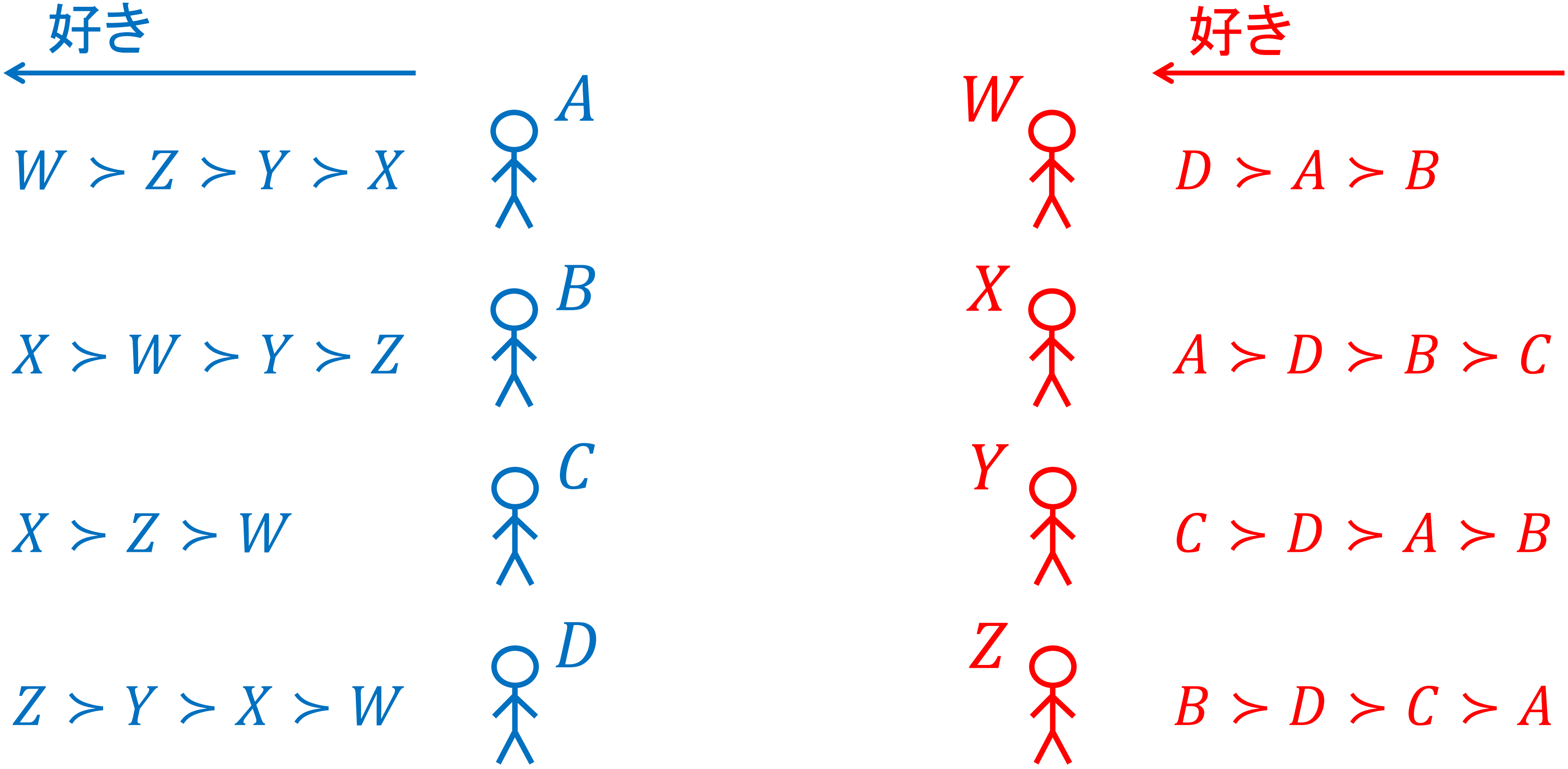
男性側がプロポーズする場合に得られる安定結婚

人数が異なる場合



女性側がプロポーズする場合に得られる安定結婚

選好リストが不完全な場合

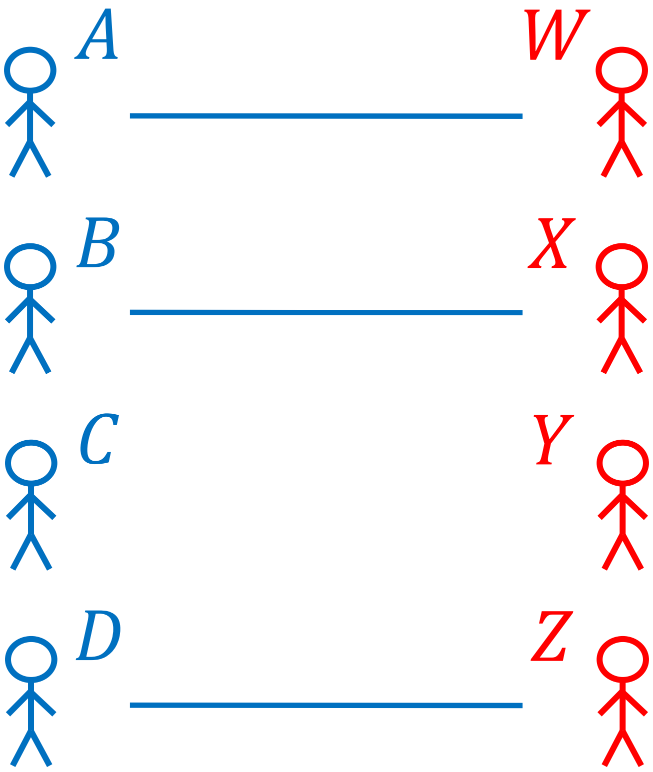


$W \succ Z \succ Y \succ X$	A	W	$D \succ A \succ B$
$X \succ W \succ Y \succ Z$	B	X	$A \succ D \succ B \succ C$
$X \succ Z \succ W$	C	Y	$C \succ D \succ A \succ B$
$Z \succ Y \succ X \succ W$	D	Z	$B \succ D \succ C \succ A$

選好リストが不完全な場合

好き ←

← 好き



$\textcircled{W} \succ Z \succ Y \succ X$ $\quad A \quad W \quad$ $D \succ \textcircled{A} \succ B$

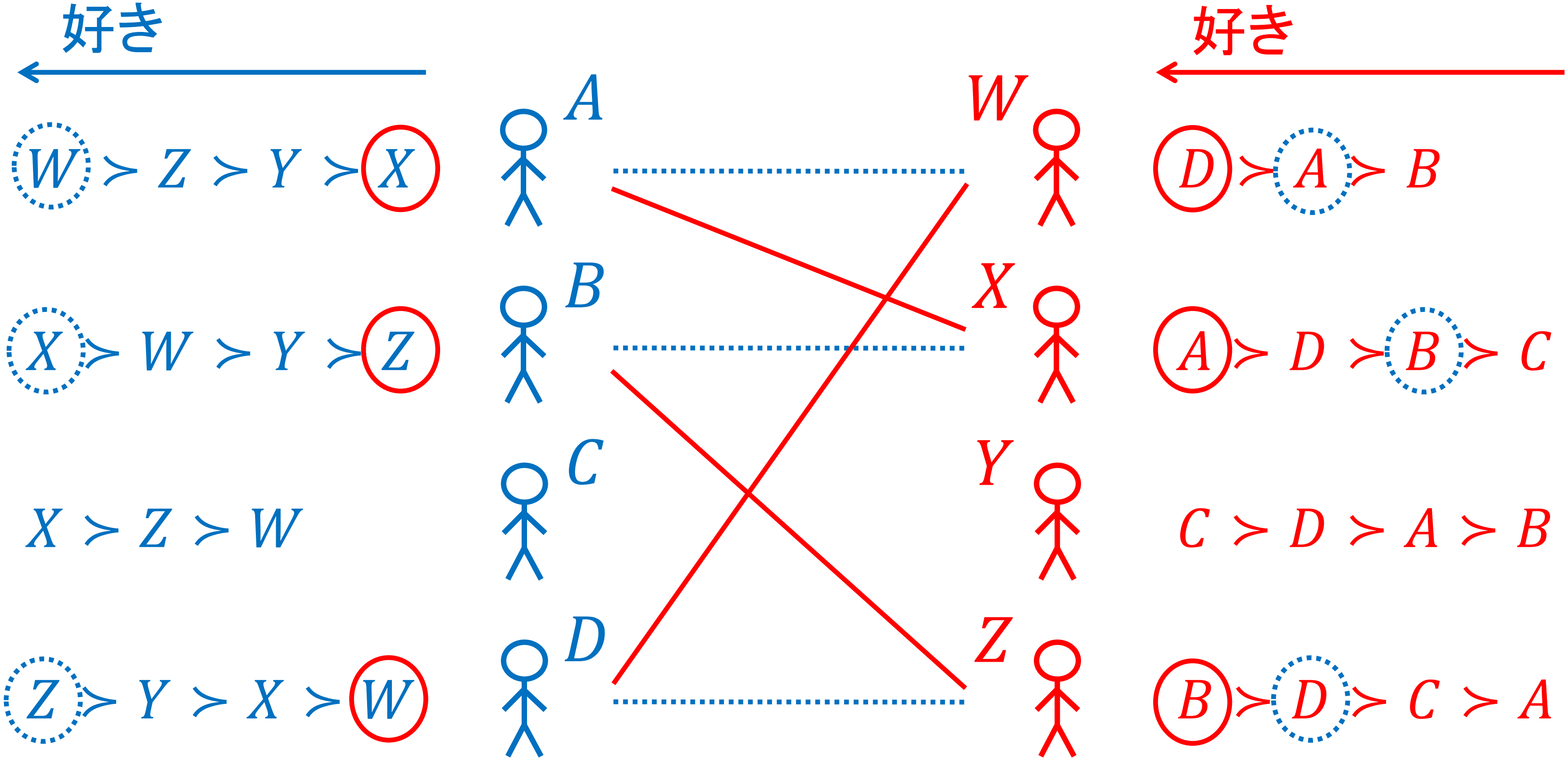
$\textcircled{X} \succ W \succ Y \succ Z$ $\quad B \quad X \quad$ $A \succ D \succ \textcircled{B} \succ C$

$X \succ Z \succ W$ $\quad C \quad Y \quad$ $C \succ D \succ A \succ B$

$\textcircled{Z} \succ Y \succ X \succ W$ $\quad D \quad Z \quad$ $B \succ \textcircled{D} \succ C \succ A$

男性側がプロポーズする場合に得られる安定結婚

選好リストが不完全な場合



$W \succ Z \succ Y \succ X$

$X \succ W \succ Y \succ Z$

$X \succ Z \succ W$

$Z \succ Y \succ X \succ W$

$D \succ A \succ B$

$A \succ D \succ B \succ C$

$C \succ D \succ A \succ B$

$B \succ D \succ C \succ A$

女性側がプロポーズする場合に得られる安定結婚

絶望の定理

ある安定結婚で誰とも結ばれない人は

任意の安定結婚で誰とも結ばれない

絶望の定理の証明

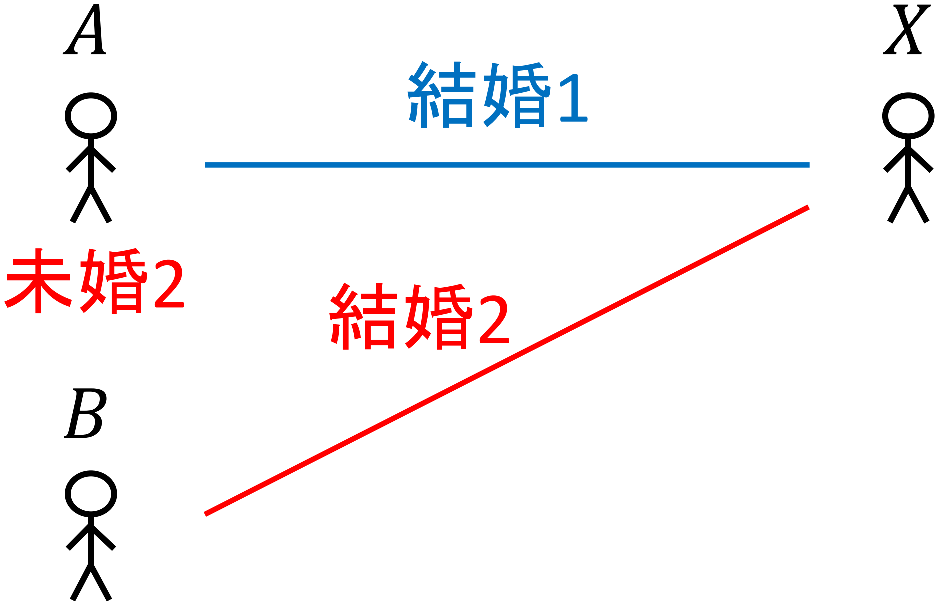
2つの安定結婚において，一方で既婚，他方で未婚であるような人Aが存在したとする

絶望の定理の証明

2つの安定結婚において，一方で既婚，他方で未婚であるような人Aが存在したとする

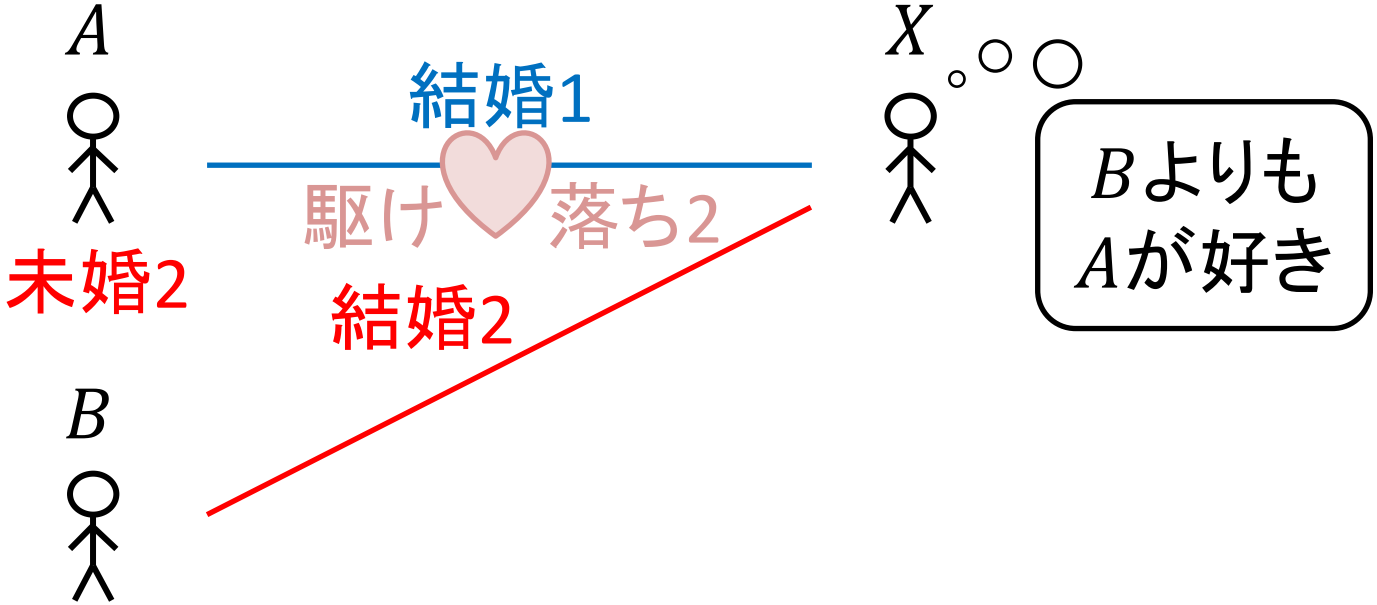
絶望の定理の証明

2つの安定結婚において，一方で既婚，他方で未婚であるような人Aが存在したとする



絶望の定理の証明

2つの安定結婚において，一方で既婚，他方で未婚であるような人Aが存在したとする



A

X

結婚1

駆け落ち2

未婚2

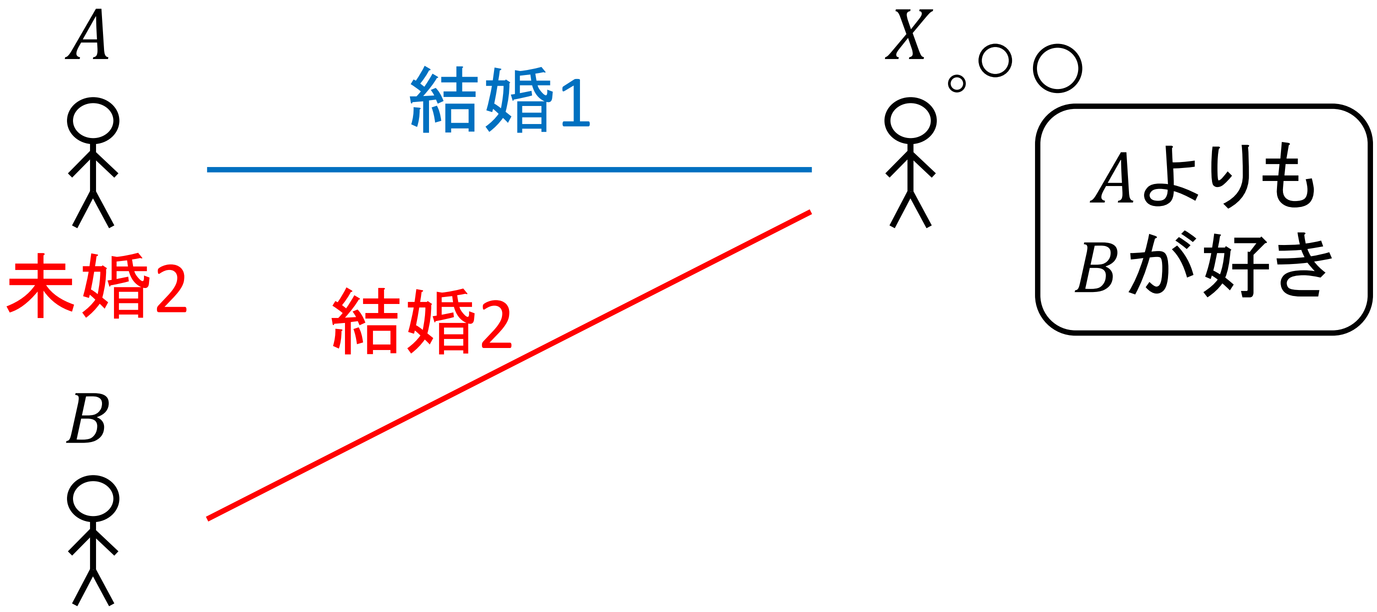
結婚2

B

BよりもAが好き

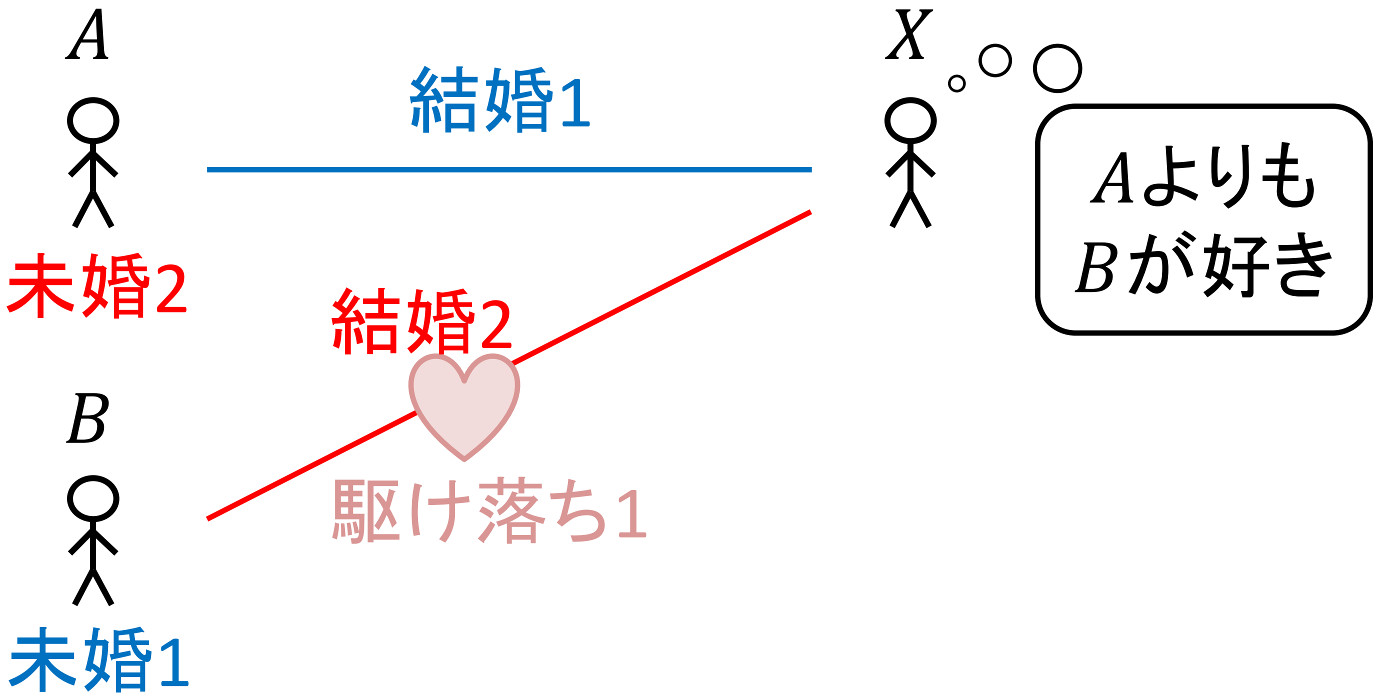
絶望の定理の証明

2つの安定結婚において，一方で既婚，他方で未婚であるような人Aが存在したとする



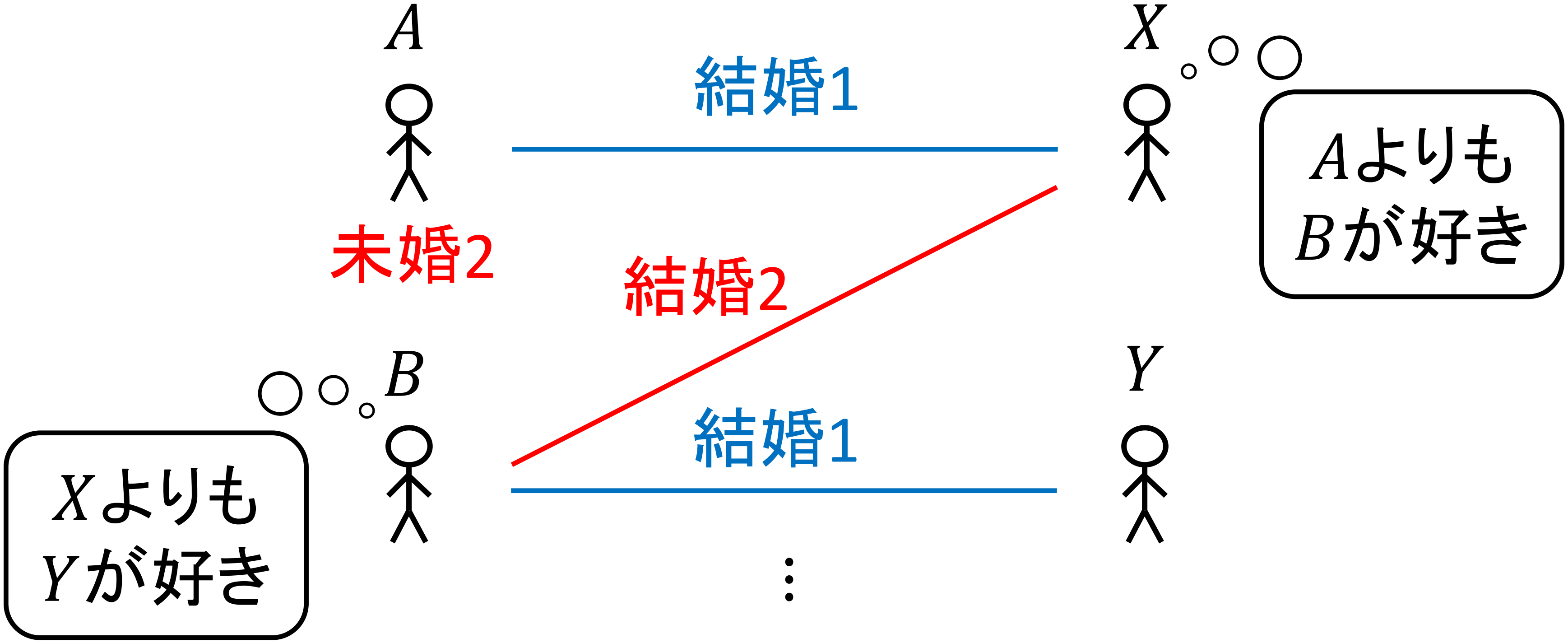
絶望の定理の証明

2つの安定結婚において，一方で既婚，他方で未婚であるような人Aが存在したとする

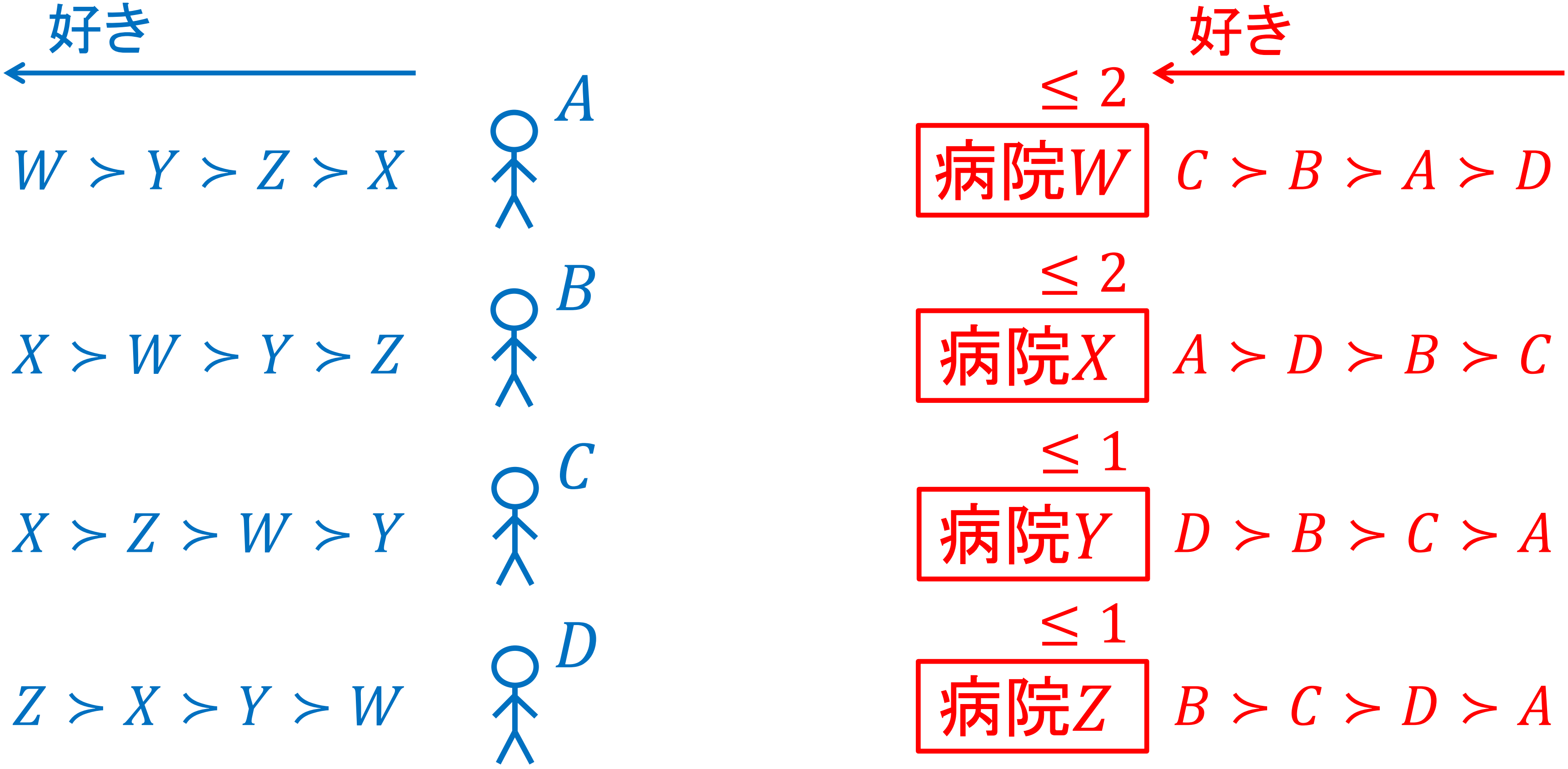


絶望の定理の証明

2つの安定結婚において，一方で既婚，他方で未婚であるような人Aが存在したとする



研修医配属問題 (一夫多妻制)



好き ←

好き ←

$W \succ Y \succ Z \succ X$ A

$X \succ W \succ Y \succ Z$ B

$X \succ Z \succ W \succ Y$ C

$Z \succ X \succ Y \succ W$ D

≤ 2 病院W $C \succ B \succ A \succ D$

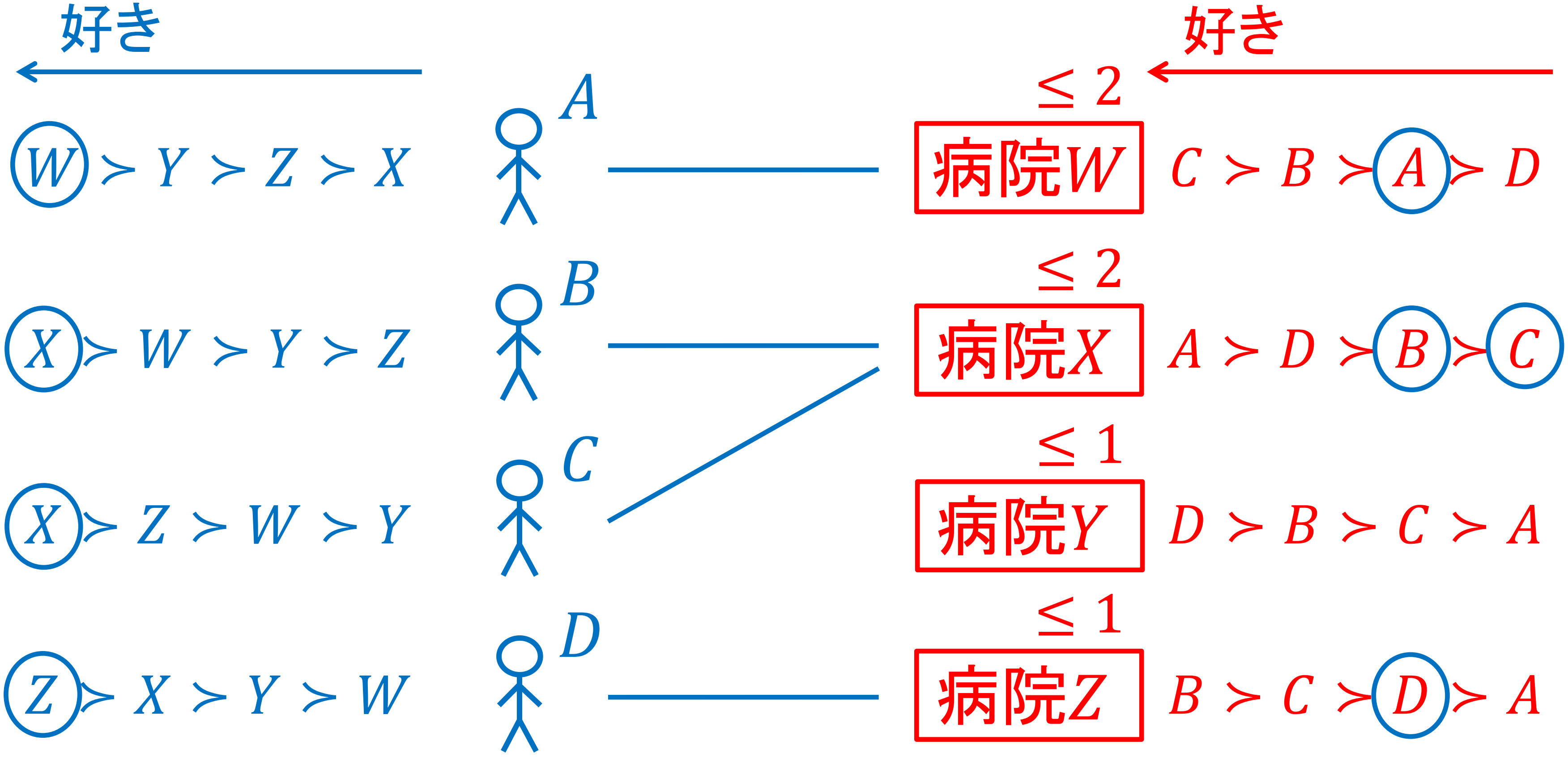
≤ 2 病院X $A \succ D \succ B \succ C$

≤ 1 病院Y $D \succ B \succ C \succ A$

≤ 1 病院Z $B \succ C \succ D \succ A$

引き抜きが起きないように配属を決めたい

研修医配属問題 (一夫多妻制)



$W \succ Y \succ Z \succ X$ — A — 病院W (≤ 2): $C \succ B \succ A \succ D$

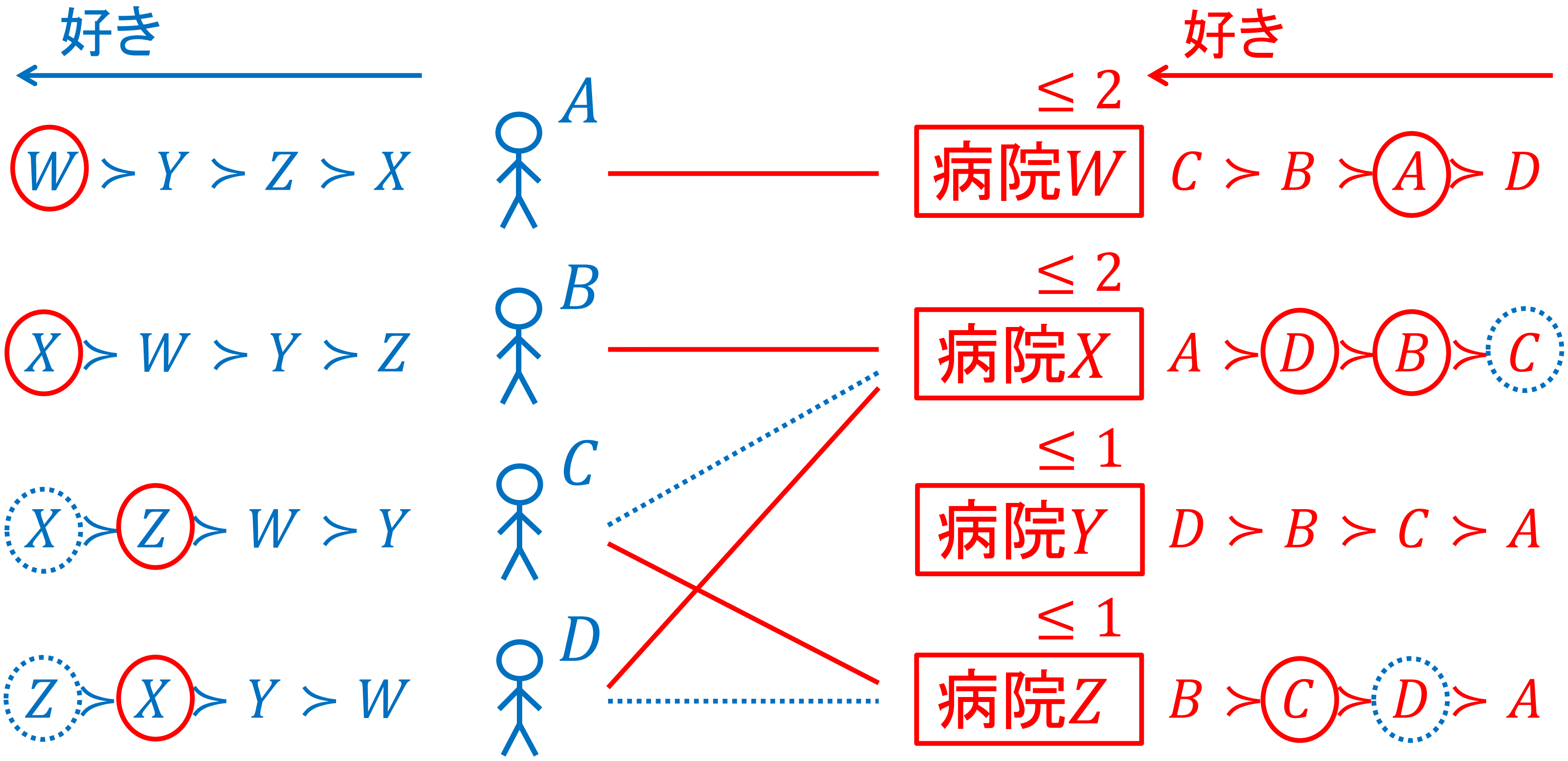
$X \succ W \succ Y \succ Z$ — B — 病院X (≤ 2): $A \succ D \succ B \succ C$

$X \succ Z \succ W \succ Y$ — C — 病院Y (≤ 1): $D \succ B \succ C \succ A$

$Z \succ X \succ Y \succ W$ — D — 病院Z (≤ 1): $B \succ C \succ D \succ A$

研修医側がプロポーズする場合に得られる安定配属

研修医配属問題 (一夫多妻制)



好き

好き

A: $W \succ Y \succ Z \succ X$

B: $X \succ W \succ Y \succ Z$

C: $X \succ Z \succ W \succ Y$

D: $Z \succ X \succ Y \succ W$

病院W ≤ 2: $C \succ B \succ A \succ D$

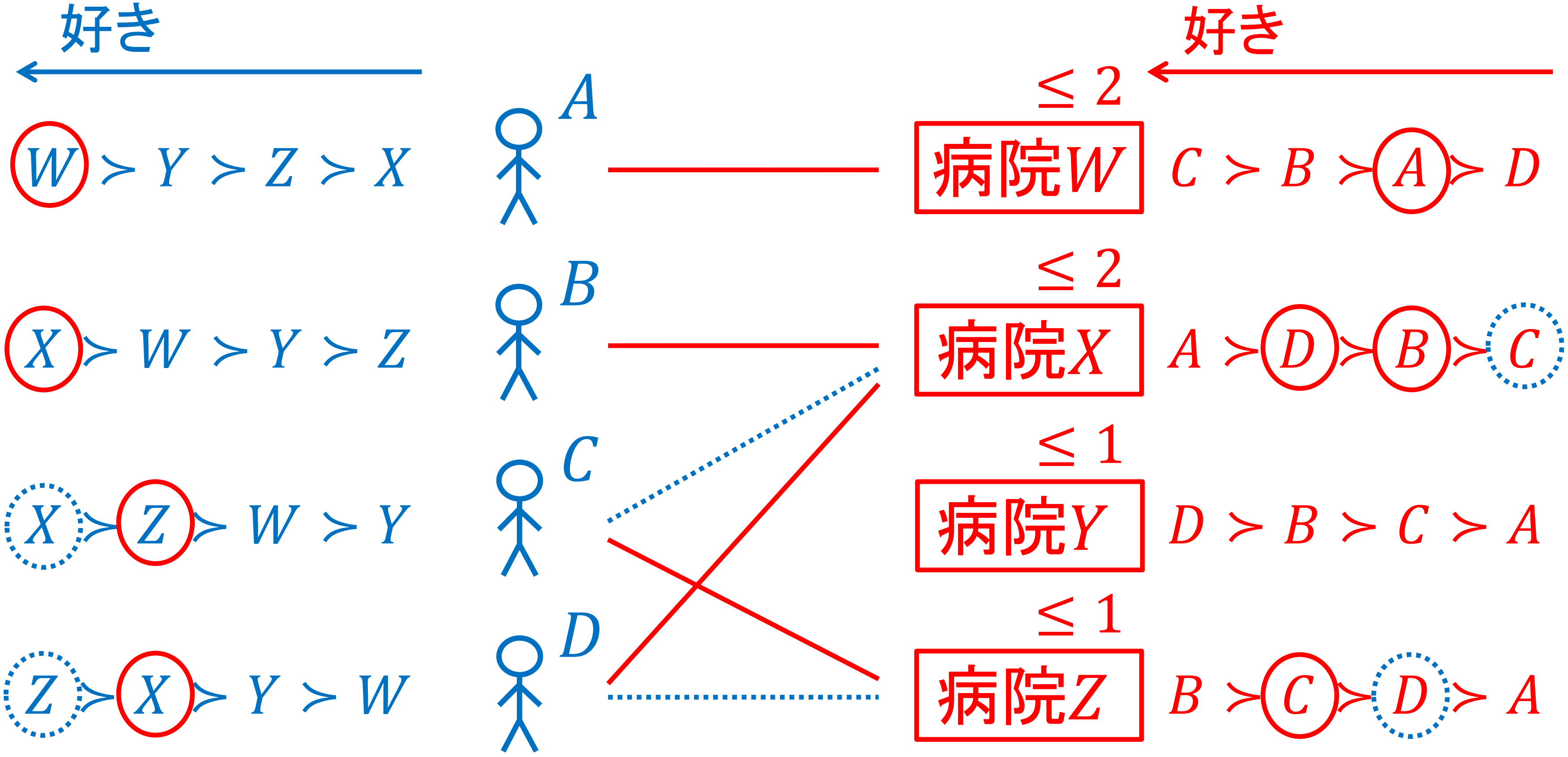
病院X ≤ 2: $A \succ D \succ B \succ C$

病院Y ≤ 1: $D \succ B \succ C \succ A$

病院Z ≤ 1: $B \succ C \succ D \succ A$

病院側がプロポーズする場合に得られる安定配属

田舎の病院定理 [Roth 1986]



$W \succ Y \succ Z \succ X$	A	病院W	≤ 2	$C \succ B \succ A \succ D$
$X \succ W \succ Y \succ Z$	B	病院X	≤ 2	$A \succ D \succ B \succ C$
$X \succ Z \succ W \succ Y$	C	病院Y	≤ 1	$D \succ B \succ C \succ A$
$Z \succ X \succ Y \succ W$	D	病院Z	≤ 1	$B \succ C \succ D \succ A$

- 各病院に安定配属で配属される研修医の数は同じ
- 定員に満たない病院に配属される研修医は常に同じ

全体の構成

- 個人が幸せになるためには
  - 1番好きな人と結婚できる確率を上げる
  - 結婚相手の順位の期待値を下げる

- 安定な結婚とは
  - 駆け落ちが起こらないカップリング
  - 絶望の定理 (田舎の病院定理)
  - 嘘つきは得をするか

絶望の定理 (再掲)

ある安定結婚で誰とも結ばれない人は

任意の安定結婚で誰とも結ばれない

希望の定理

ある安定結婚で誰かと結ばれる人は

任意の安定結婚で誰かと結ばれる

欲望の心理

ある安定結婚で誰かと結ばれる人は

任意の安定結婚で誰かと結ばれる

より良い相手と結ばれたい!!!

Gale–Shapleyアルゴリズム (再掲)

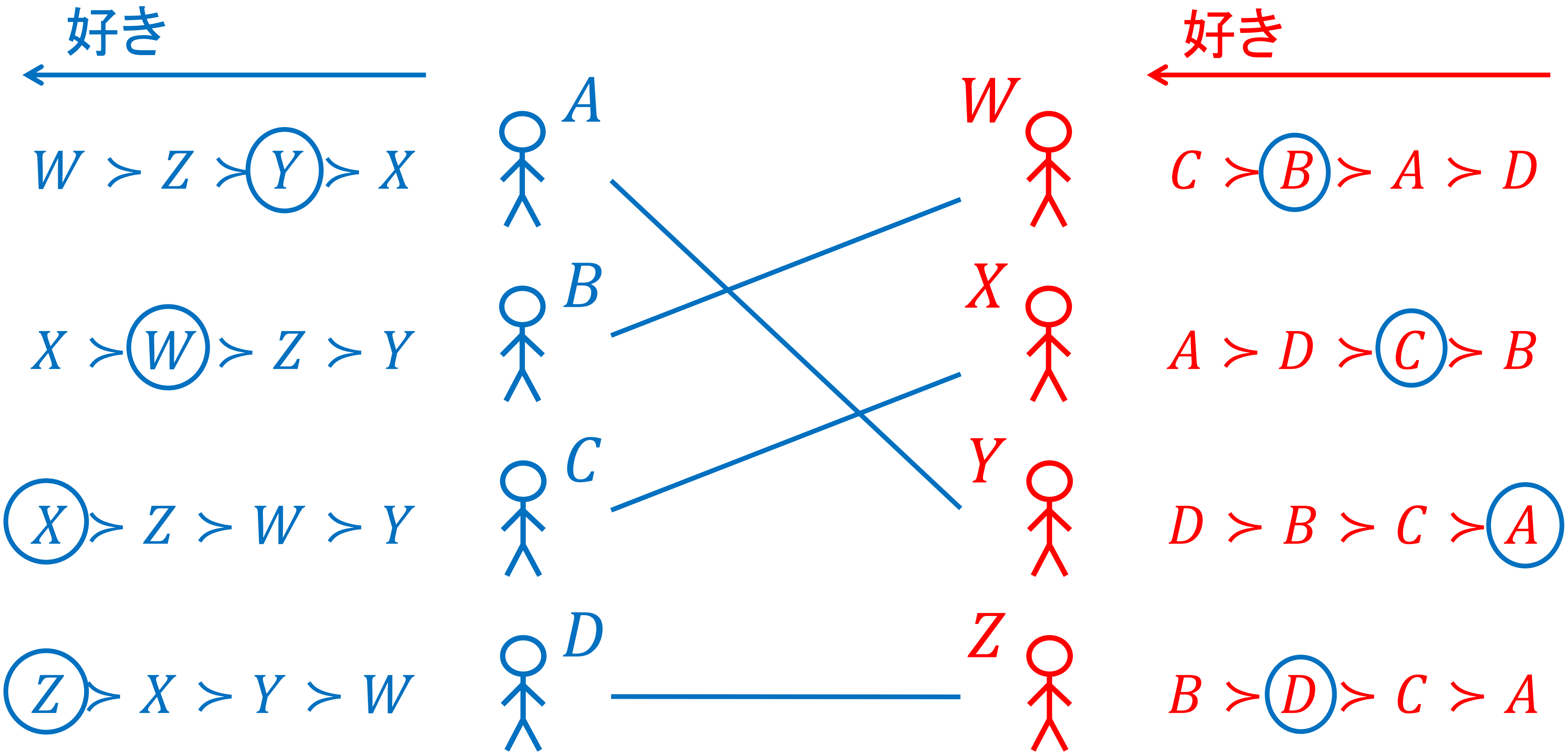
- 各男性は同じ女性に複数回プロポーズしない
  → 高々 (男性数) × (女性数) 回で終了する

- 必ず安定結婚を見つける
  → 安定結婚の存在を保証

- 各男性・女性はそれぞれ，安定結婚で結ばれうる中で**最良の女性**・**最悪の男性**とカップリングされている

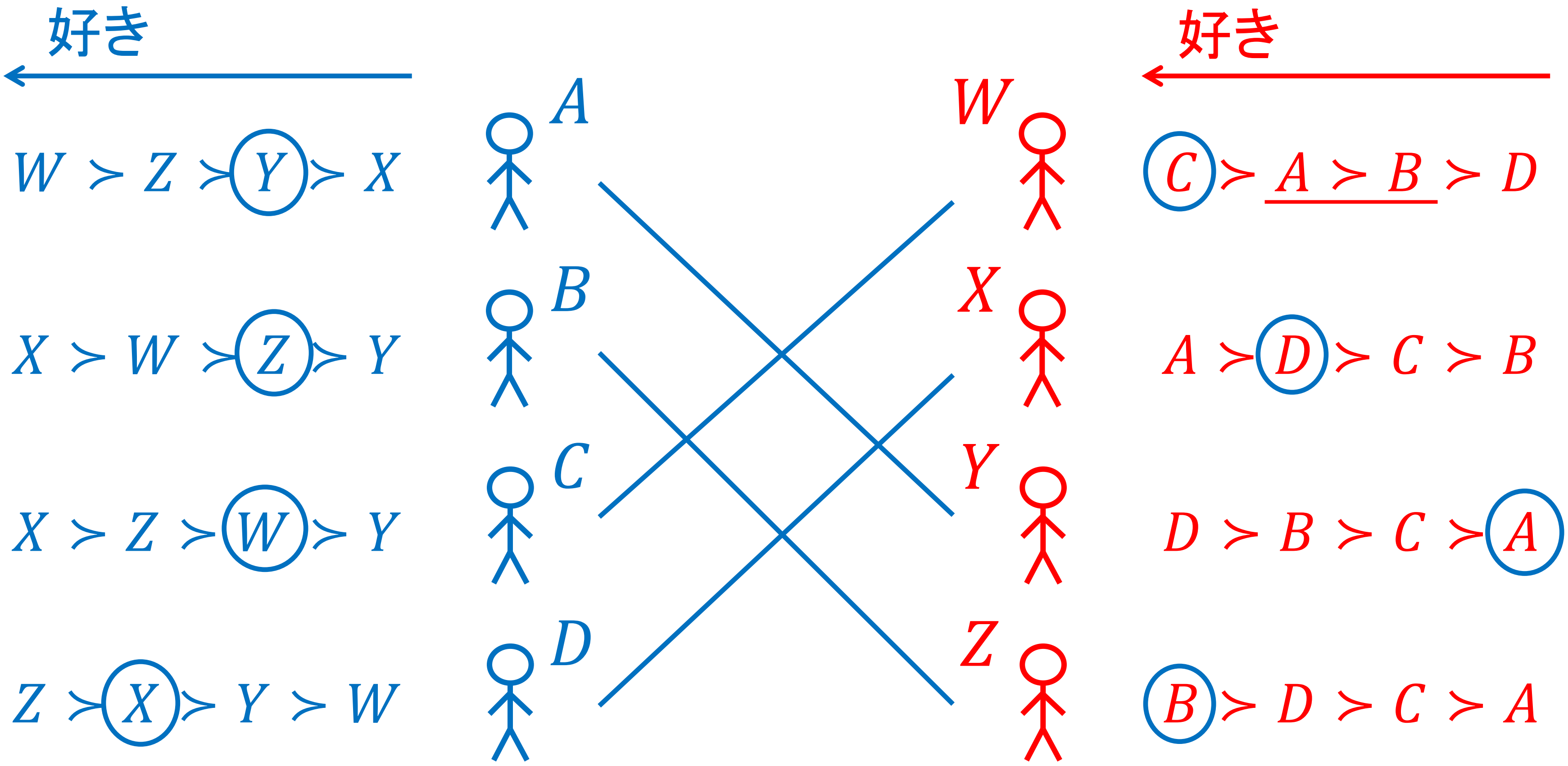
- 人数が異なる場合，選好リストが不完全な場合，一夫多妻制・多夫多妻制の場合にも上記が成り立つ

最初の例



男性側がプロポーズする場合に得られる安定結婚

Wが嘘をついた場合



$W \succ Z \succ \enclose{circle}{Y} \succ X$	A	W	$\enclose{circle}{C} \succ \underline{A \succ B} \succ D$
$X \succ W \succ \enclose{circle}{Z} \succ Y$	B	X	$A \succ \enclose{circle}{D} \succ C \succ B$
$X \succ Z \succ \enclose{circle}{W} \succ Y$	C	Y	$D \succ B \succ C \succ \enclose{circle}{A}$
$Z \succ \enclose{circle}{X} \succ Y \succ W$	D	Z	$\enclose{circle}{B} \succ D \succ C \succ A$

男性側がプロポーズする場合に得られる安定結婚

Gale–ShapleyアルゴリズムとA耐戦略性

- **プロポーズ側**は嘘をついても得をしない (耐戦略的)
- **被プロポーズ側**は嘘をついて得をする場合がある
- 両側に耐戦略性を持つ**安定結婚**アルゴリズムはない

Gale–Shapleyアルゴリズムと耐戦略性

- **プロポーズ側**は嘘をついても得をしない (耐戦略的)
- **被プロポーズ側**は嘘をついて得をする場合がある
- 両側に耐戦略性を持つ**安定結婚**アルゴリズムはない

正直にアタックしよう!!!

参考文献

Y. S. Chow, S. Moriguti, H. Robbins, S. M. Samuels:
Optimal Selection Based on Relative Rank (the “Secretary Problem”),
Israel Journal of Mathematics, **2** (1964), pp. 81–90.

D. Gale, L. S. Shapley:
College Admissions and the Stability of Marriage,
The American Mathematical Monthly, **69** (1962), pp. 9–15.

A. Roth: **On the Allocation of Residents to Rural Hospitals
(A General Property of Two-Sided Matching Markets)**,
Econometrica, **54** (1986), pp. 425–427.