続・闇空間 $\mathbb{R}$ の性質

ぴあのん @piano2683

2016 年 3 月 20 日
@第 8 回関西すうがく徒のつどい

予備知識について（アブストより再掲）

本講演では以下を予備知識として仮定します：

- 実数体 $\mathbb{R}$ の定義と基本的な性質
  （$\mathbb{R}$ の位相，中間値の定理程度）
- 体論（代数拡大・代数閉体・代数閉包の概念，および有理函数体を知っていること）

さらに欲を言えば，古典代数幾何（代数的集合・構成可能集合について）またはモデル理論（定義可能集合について）のどちらかに触れたことがあると本講演の理解の助けになるでしょう．

実数体 $\mathbb{R}$ の特異性

第 5 回つどいの alg_d 氏の講演 [8] において，次が示された：

Theorem (alg_d, 2014)

$\mathbb{R}$ はクソ．

Proof

- 連続体濃度 $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ の大きさわけわからん
- $\mathbb{Q}$ の p 進付値による完備化 $\mathbb{Q}_p$ の方が性質が良い
    - 小数展開の一意性
    - 付値が非アルキメデス的

■

実数体 $\mathbb{R}$ の特異性

一方で，数学を展開する際は $\mathbb{R}$ の完備性を使う場面が少なくない：

- そもそも中間値の定理や平均値の定理には，完備性を用いていた．
- 付値・距離空間・測度など，いくつかの理論は $\mathbb{R}$ 値であることを前提にしている．

$\mathbb{R}$ の完備性は数学にとって本質的なのだろうか？

講演の目標

$\mathbb{R}$ は数学を展開するのに必要ない！

“ $\mathbb{R}$ っぽい ” 構造の本質とは何なのか？

(1) “ $\mathbb{R}$ っぽい ” 体の理論を概観する．

(2) モデル理論との関わりを見る．

(3) “ $\mathbb{R}$ っぽい ” 体の理論を含むさらに柔軟な枠組みとして**順序極小構造**を導入し，その幾何的/解析的性質を見る．

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{R}$ は特別でもなんでもなく，“ $\mathbb{R}$ っぽい ” 体で代替できることを紹介したい．

Contents

1 $\mathbb{R}$ っぽい構造
- 順序体と実体
- 実閉体

2 モデル理論との関わり
- 実閉体のモデル理論
- 実閉体のモデル理論の応用

3 順序極小構造
- 実代数幾何の歴史的背景
- 順序極小構造の幾何学
- Diophantus 幾何への応用

“ $\mathbb{R}$ っぽさ ” とは？

$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ の違いは何か？

天下り的ではあるが，$\mathbb{R}$ の本質にある代数的性質を段階的に抽出していく．

順序体

Definition

体 K に線型順序 $\leq$ が与えられているとする．以下の条件を満たすとき，K は**順序体** (ordered field) であると言う：

(1) $a < b \implies a + c < b + c$

(2) $a < b,\ 0 < c \implies ac < bc$

Remark

体 K の標数が $p > 0$ のとき，

$$0 < 1 < 2 < \cdots < p = 0$$

なので，順序体の標数は 0 でなければならない．

実体

一方で，順序に関する性質以外にも $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$ に特徴的な性質がある：

Definition

体 K において，-1 が平方和で表せない，すなわち $-1 = {a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2$ となる $a_1, \ldots, a_n \in K$ が存在しないとき，K は**実体** (real field) であると言う．

Remark

体 K の標数が $p > 0$ のとき，

$$-1 = p - 1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{p-1}$$

なので，実体の標数は 0 でなければならない．

実体の特徴づけ

以上の 2 つの概念（順序体・実体）には，次のような関係がある：

Theorem (Artin-Schreier)

体 K について次は同値：

(1) K **は実体である．**

(2) K **は順序づけ可能，すなわち，ある線型順序 $\leq$ によって K が順序体となる．**

Sketch of the Proof

$(1) \Rightarrow (2)$ **：主張より強く次が示せる：**
平方和で表せないような任意の $a \in K$ に対して，$a < 0$ にするような K の順序づけが存在する．
$(2) \Rightarrow (1)$ **：K が順序体かつ実体でないと仮定すると，**
$-1 = {a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2 \geq 0$ **となって矛盾．** ■

実体の例

- 有理数体 $\mathbb{Q}$，実数体 $\mathbb{R}$
- 実体 K に対して有理函数体 $K(x)$ は実体（実体の定義と有理函数体の性質より直ちにわかる）
- 任意の実超越数 α に対して体同型 $\mathbb{Q}(X) \simeq \mathbb{Q}(\alpha)$ を考えることで，有理函数体 $\mathbb{Q}(x)$ は $2^{\aleph_0}$ 通りの順序づけができる（ただし順序づけはこれ以外の方法でも可能）.

Remark

アルキメデス的実体（一般にアルキメデス的順序環）は $\mathbb{R}$ の部分環に同型．ここでアルキメデス的とは，「任意の $a, b > 0$ に対して，$a < nb$ なる自然数 n が存在する」ことを言う．

実閉体

$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ はともに実体である．これらを区別するために，次の概念を定義する：

Definition (実閉体)

体 K が次の条件をみたすとき，K は**実閉体** (real closed field) であるという：

(1) K は実体である．

(2) K の代数拡大体で実体となるようなものは K のみである．

実際に，$\mathbb{R}$ は実閉体である（真の代数拡大体が $\mathbb{C}$ のみ！）．
また，代数閉体に関する命題のアナロジーとして，次が成立する．

Theorem

任意の実体に対して，“ **実閉包** ” が同型を除いて一意に存在する．

実閉体の例

Examples

- 実代数的数体 $\bar{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$（可算な実閉体！）
- 非アルキメデス的実閉体
（*e.g.* 非アルキメデス的順序体の実閉包）

実閉体の例については，次節でより深く述べる．

実閉体の特徴づけ

Theorem

体 K について以下は同値：

(i) K は実閉体である．

(ii) $\sqrt{-1} \notin K$ かつ，$K(\sqrt{-1})$ は代数閉体である．

(iii) K は代数閉体ではなく，K の代数閉包 Ω は K の有限次拡大体である．

(iv) 「任意の一変数多項式 $f(x) \in K[x]$ に対して，中間値の定理が成立」となるように，K を順序づけることができる．

(v) K は次の 3 条件を満たす：

  (1) K は実体である

  (2) 任意の元 $a \in K$ に対して，ある $b \in K$ が存在して，$a = b^2$ または $a = -b^2$ を満たす

  (3) 任意の奇数次の一変数多項式 $f(x) \in K[x]$ が K に根を持つ

歴史的背景

Hilbert (1862-1943) は 1900 年の国際数学者会議において，「20 世紀に解決されるべき 23 の問題」の第 17 問題として次の問題を提示した．

Problem (Hilbert の第 17 問題)

$f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ について，

$$f(a_1, \ldots, a_n) \text{ が定義されている}$$
$$\implies f(a_1, \ldots, a_n) \geq 0 \quad \text{（ただし，} a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}\text{）}$$

が成り立つとき，f は $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ の元の平方和で書ける．

$\rightsquigarrow$ この問題を解決するために，Artin と Schreier は実体の理論を構築した．それにより，Hilbert の第 17 問題は肯定的に解決された．この講義ではモデル理論的証明を紹介する．

1 $\mathbb{R}$ っぽい構造
- 順序体と実体
- 実閉体

2 モデル理論との関わり
- 実閉体のモデル理論
- 実閉体のモデル理論の応用

3 順序極小構造
- 実代数幾何の歴史的背景
- 順序極小構造の幾何学
- Diophantus 幾何への応用

ろんりがく徒のための注意

実閉体の特徴付け (v) を公理として採用することで，実閉体は一階述語論理で定義可能であることがわかる．

Definition

（順序環の言語における）実閉体の公理系 RCF **を次で定める：**

(1) **順序体の公理**

(2) **各自然数** $n \geq 1$ **に対して，** $\forall x_1 \cdots \forall x_n(-1 \neq {x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2)$

(3) $\forall x \exists y(x = y^2 \vee -x = y^2)$

(4) **各奇数** $n \geq 1$ **に対して，**

$$\forall a_{n-1} \cdots \forall a_1 \forall a_0 \exists x(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0)$$

よって，一階のモデル理論の結果を実閉体の場合に適用することができる．

用語について

「$\mathbb{R}$ と実閉体はどのくらい似ているか？」を正確に定式化するのにモデル理論の言葉を使う．

用語集

用語	意味	具体例
原子論理式	(不) 等式	$x = y + z, \quad x + y < z$
論理式	述語	$\neg\exists y(\exists z(x = y \cdot z) \wedge y \neq 1 \wedge y \neq x)$
閉論理式	命題	$\forall x \forall y(x + y = y + x), \quad \exists x \forall y(x < y)$

$K \models \varphi$ で「K で φ が真になる」ことを表す．

解釈の例

$\varphi \equiv \exists x(x^2 = -1)$ と置くと，

$$\mathbb{R} \not\models \varphi \qquad \mathbb{C} \models \varphi$$

実閉体は $\mathbb{R}$ と“同じ”

実閉体は $\mathbb{R}$ とどのくらい似ているのか．
$\rightsquigarrow$ 一階の閉論理式では区別できない！

Theorem (RCF の完全性)

公理系 RCF は完全である，すなわち，任意の実閉体 K，L と K, L の元をパラメータとして持たない任意の閉論理式 φ に対し，次が成り立つ：

$$K \models \varphi \iff L \models \varphi$$

さらに言い換えると，

$\mathbb{R}$ で成り立つ命題は任意の実閉体でも成り立つ．

モデル理論の言葉を使うと上のような主張が正確に表現できる．

実閉体は遍在する

Theorem

(1) 任意の無限基数 κ に対して，$|K| = \kappa$ なる実閉体 K が存在する（Löwenheim-Skolem の定理）．

(2) 実閉体の拡大 $K \subseteq L$ は基本拡大である，すなわち，任意の論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ と元 $a_1, \ldots, a_n \in K$ に対し，

$$K \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \iff L \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

（RCF のモデル完全性）

Hilbert の第 17 問題

Theorem (Hilbert の第 17 問題)

$f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ について，

$$f(a_1, \ldots, a_n) \text{ が定義されている} \\ \implies f(a_1, \ldots, a_n) \geq 0 \quad \text{（ただし，} a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}\text{）}$$

が成り立つとき，f は $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ の元の平方和で書ける．

Proof by A. Robinson

仮定をみたすような $f(\bar{x}) \in \mathbb{Q}(\bar{x})$ をとる．もし f が $\mathbb{Q}(\bar{x})$ の元の平方和で書けなかったとすると，$\mathbb{Q}(\bar{x})$ の順序付けとして，$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\bar{x})$ は順序体としての拡大かつ，$\mathbb{Q}(\bar{x})$ において $f(\bar{x}) < 0$ となるようなものがとれる．

Hilbert の第 17 問題

F を $\mathbb{Q}$ の実閉包，R を $F(\bar{x})$ の実閉包とする．（ここで $F, \mathbb{Q}(\bar{x}) \subseteq F(\bar{x}) \subseteq R$ が順序体としての拡大となるように順序付けしておく．）

$$\begin{array}{ccccc} & F & & & \\ \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \\ \mathbb{Q} & & & F(\bar{x}) & \subseteq \quad R \\ \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \\ & \mathbb{Q}(\bar{x}) & & & \end{array}$$

このとき，$R \models \exists \bar{v}(f(\bar{v}) < 0)$ となっている．RCF のモデル完全性より $F \prec R$ であり，さらに $\exists \bar{v}(f(\bar{v}) < 0)$ は $\mathbb{Q}$ の元しかパラメーターとして持たないので，$F \models \exists \bar{v}(f(\bar{v}) < 0)$ となる．ここで $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$ なので，$f(\bar{b}) < 0$ なる $\bar{b} \in F^n$ の“十分近くの”$\bar{a} \in \mathbb{Q}^n$ をとれば $f(\bar{a}) < 0$ となって仮定に反する． ■

超準解析

少々脱線になるが，モデル理論の応用の例として，A. Robinson による**超準解析**がある．$\mathbb{R} \prec \mathbb{R}^*$ なる“超実数体”をとると，$\mathbb{R}^*$ は非アルキメデス的なので特に“無限小元”, “無限大元”をもつ[1]．そこで $\mathbb{R}^*$ 上では Leibniz 流の無限小解析を数学的に厳密に展開することができる．
さらに，$\mathbb{R} \prec \mathbb{R}^*$ なので，$\mathbb{R}^*$ で真になる（パラメーターとして $\mathbb{R}$ の元しかもたないような）命題は $\mathbb{R}$ でも真になる．超準解析の文脈ではこの事実のことを**移行原理**と呼ぶ．移行原理を基礎づけとして，$\mathbb{R}$ における解析的命題を示すのが超準解析の基本的な手法である．なお，超実数体 $\mathbb{R}^*$ 上での解析学については，次節でもう少し触れることにする．

[1] このような基本拡大をとることは（RCF の特殊な性質を使わなくても）一般の無限モデルでできる．（Löwenheim-Skolem の上昇定理）

1. $\mathbb{R}$ っぽい構造
   - 順序体と実体
   - 実閉体
2. モデル理論との関わり
   - 実閉体のモデル理論
   - 実閉体のモデル理論の応用
3. 順序極小構造
   - 実代数幾何の歴史的背景
   - 順序極小構造の幾何学
   - Diophantus 幾何への応用

これまでで，$\mathbb{R}$ の代数的性質の本質は，実閉体としての性質にあることがわかった．

では，$\mathbb{R}$ の幾何的性質・解析的性質の本質はどこにあるのだろうか？ これらについて論じるには，多項式函数だけではなく解析的な函数を取り扱えるような枠組みが必要となる．

そこでまずは，実代数幾何・実解析幾何の歴史的な背景から述べることにする．

半代数的集合

Definition (半代数的集合)

$\mathbb{R}^n$ において，$f(\bar{x}) = 0$ や $f(\bar{x}) < 0$ $(f(\bar{x}) \in \mathbb{R}[\bar{x}])$ の解集合として表される部分集合および，それらの Boole 結合として表される部分集合を**半代数的集合**と言う．

半代数的集合は幾何的に " 穏和な " 振る舞いをする：

- 多項式写像 $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ による半代数的集合（$\subseteq \mathbb{R}^m$）の像は，また半代数的集合（$\subseteq \mathbb{R}^n$）になる．
- stratification（よい境界を持つ有限分割）を持つ．
- 半代数的集合 $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ に対して，点 $\bar{a} \in \mathbb{R}^m$ 上の fiber として現れる半代数的集合 $X_{\bar{a}} = \{\, \bar{b} \in \mathbb{R}^n \,;\, (\bar{a}, \bar{b}) \in X \,\}$ は，点 $\bar{a}$ を動かしたときに同相を除いて有限種類しかない．

Grothendieck's Tame Topology

幾何的に“穏和な”振る舞いをする $\mathbb{R}^n$ の部分集合のクラスは，半代数的集合に限らない．実際，広中平祐が発展させた subanalytic set **の理論によって，「解析函数を使って定義された集合」のクラスが幾何的にうまく振る舞うことがわかっていた．**

一方，ある種のモジュライ空間は自然に stratification **を持つらしい…（詳しくはモジュライの専門家に訊いてください）**

そこで， Grothendieck **は** *Esquisse d'un Programme* (Sketch of a Program) **において，** tame topology **の理論の重要性を提起した（***cf.* A'Campo, et al. [1]**）．**

Grothendieck's Tame Topology

Grothendieck の言（超意訳）

（幾何的な文脈では）一般の位相空間論は病的な例があるからクソ

Peano 曲線などの病的な図形は幾何的にうまく振る舞ってくれないので，それらを考察対象に含めないような“穏和な幾何学”を構築したい．
$\rightsquigarrow$ 半代数的集合や subanalytic set の幾何学を包括するように，「stratification の存在」などによって tame topology の公理化が試みられた．
$\rightsquigarrow$ 順序極小構造は，単純な有限性に関する公理から豊富な幾何的性質が従うという点で，tame topology の公理化の一つの模範になっている．

準備：定義可能集合

R を実閉体とする．論理式 $\varphi(\bar{x})$ に対して，解集合 $\{\,\bar{a} \in R^n \,;\, R \models \varphi(\bar{a})\,\}$ を考える．このような形をした部分集合 $X \subseteq R^n$ を**定義可能集合**と言う．
例えば，$\varphi(x) \equiv [f(x) = 0]\ \ (f(x) \in R[x])$ ならば，解集合は方程式 $f(x) = 0$ の R における解全体を表す．

Remark

(1) 論理式 $\varphi(\bar{x}, y)$ が定義する集合を $X \subseteq R^{n+1}$ と置く．このとき，論理式 $\exists y \varphi(\bar{x}, y)$ が定義する集合は，射影 $R^n \times R \to R^n$ による X の像に一致する．

(2) **量化記号を持たない論理式**によって定義される集合全体は，半代数的集合全体に一致する．

準備：量化記号消去

実閉体の公理系 RCF は**量化記号消去**を持つ，すなわち（順序環の言語で書かれた）任意の論理式 $\varphi(\bar{x})$ に対して，
$\mathrm{RCF} \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$ となるような論理式 $\psi(\bar{x})$ が存在する．

Example (量化記号消去の例)

実閉体 R に対し，$R \models \forall b \forall c\, (\exists x(x^2 + bx + c = 0) \leftrightarrow b^2 - 4c \geq 0)$

Remark

(1) $\exists y \varphi(\bar{x}, y)$ が定義する集合は量化記号を持たない論理式を使っても定義できる．したがって，特に $\varphi(\bar{x}, y)$ のときを考えれば，「半代数的集合の射影はまた半代数的集合」となることがわかる（Tarski-Seidenberg の定理）．

(2) 量化記号消去の帰結として，「RCF のモデル完全性」や「実閉体上の半代数的集合全体が順序極小構造を成すこと」が従う．

定義 I

Definition (構造)

集合 $R \neq \varnothing$ 上の**構造**とは，集合族 $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_n)_{n\geq 1}$ であって以下をみたすもの：

(1) 各 $\mathcal{S}_n$ は $\mathcal{P}(R^n)$ の部分 Boole 代数．

(2) $X \in \mathcal{S}_n$ ならば $X \times R, R \times X \in \mathcal{S}_{n+1}$

(3) $\{\, (x_1, \ldots, x_n) \in R^n \ ;\ x_1 = x_n \,\} \in \mathcal{S}_n$

(4) $X \in \mathcal{S}_{n+1}$ ならば $\pi(X) \in \mathcal{S}_n$
（ここで $\pi\colon R^{n+1} \to R^n$ は最初の n 個の成分に関する射影）

モデル理論における $\mathcal{L}$-構造と上の意味での構造は，**$\mathcal{L}$-論理式による定義可能集合**の概念を通して対応する．

定義 II

Definition (順序極小構造)

DLO（端点を持たない稠密線型順序集合）$(R, <)$ 上の構造 $\mathcal{S}$ が以下を満たすとき，$(R, < \mathcal{S})$ は**順序極小構造**であるという：

(1) $\{(x, y) \in R^2 \,;\, x < y\} \in \mathcal{S}_2$

(2) $\mathcal{S}_1$ は R の区間と点の有限和からなる．

順序極小構造 $(R, < \mathcal{S})$ に対して，$\mathcal{S}_n$ の元のことを（R^n の）**定義可能集合**と呼ぶ．また，写像 $f\colon X \to R^m$ $(X \subseteq R^n)$ のグラフが（R^{n+m} の部分集合と見なした上で）定義可能であるとき，f は**定義可能函数**であると言う．

初等的な例

Examples (順序極小構造の例 1)

(1) DLO $(R,<)$ に対して，
$\mathcal{S}_n := \{$ “ 順序 $<$ で定義できる（R^n の）部分集合 ” $\}$
としたもの．

(2) 順序体 K と順序 K-ベクトル空間 R に対して，
$\mathcal{S}_n := \{$ “（R^n の）半線型集合 ” $\}$ としたもの．

(3) 実閉体 R に対して，$\mathcal{S}_n := \{$（R^n の）半代数的集合 $\}$ としたもの．（RCF が量化記号消去をもつことの帰結）

Proposition

順序環 R 上の順序極小構造 S が環の演算 $+, \times$ を定義可能函数として含むとき，R は実閉体になる．

$\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$, $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$, $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$

さらに $\mathbb{R}$ に解析的な函数を付け加えた順序極小構造として，以下の例がある．

Examples (順序極小構造の例 2)

(1) $\mathbb{R}$ **において，体の演算と** $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **によって定義できるような集合全体がなす構造は** $\mathbb{R}$ **上の順序極小構造** $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$ **を定める．**

(2) $\mathbb{R}$ **において，体の演算と** "restricted analytic function" **によって定義できるような集合（**= subanalytic set with compact closure**）全体がなす構造は** $\mathbb{R}$ **上の順序極小構造** $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ **を定める．**

(3) **上の** $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$ **と** $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ **を " 合わせた " 構造は** $\mathbb{R}$ **上の順序極小構造** $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ **を定める．**

これらの解析的な順序極小構造の例はふつう量化記号消去を持たないので，順序極小性やモデル完全性を示すのは簡単ではない．

Monotonicity Theorem

以下，$(R, <, \mathcal{S})$ を順序極小構造とする．
順序極小構造の定義においては $\mathcal{S}_1$ の元に対する有限性しか課していないが，この条件が一般の $\mathcal{S}_n$ についても影響を及ぼす．

Theorem (Monotonicity Theorem)

任意の $a < b \in R$ と定義可能函数 $f\colon (a, b) \to R$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ と $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N < a_{N+1} = b$ が存在して以下を満たす：各区間 (a_i, a_{i+1}) $(0 \leq i \leq N)$ 上で f は連続かつ，狭義単調もしくは定値函数．

Cell Decomposition

Theorem (Cell Decomposition Theorem)

(1) **任意の定義可能集合** $X \subseteq R^n$ **に対して，有限個の " 細胞 "** $C_1, \ldots, C_k \subseteq R^n$ **が存在して，**

$$X = \coprod_i C_i \quad \text{(disjoint union)}$$

(2) **任意の定義可能函数** $f\colon X \to R \ \ (X \subseteq R^n)$ **に対して，以下を満たす有限個の " 細胞 "** $C_1, \ldots, C_k \subseteq R^n$ **が存在：**

$X = \coprod_i C_i$ **かつ各** C_i **上で** f **は連続となる．**

さらに，上の分割は " 良い条件 " を満たすようにできる．

Curve Selection

順序極小構造 $(R, <, \mathcal{S})$ に対し，さらに R は順序加法群であるとし，$+ \colon R^2 \to R$ が定義可能函数であると仮定する．
（このとき，R はねじれのない可除加法群となる．）

Theorem (Curve Selection)

任意の定義可能集合 $X \subseteq R^n$ と $a \in \mathrm{cl}(X) \setminus X$ （$\mathrm{cl}(X)$ は X の R^n における閉包）に対して，ある $\varepsilon > 0$ と定義可能な連続単射 $\gamma \colon (0, \varepsilon) \to X$ で $\lim_{t \to 0} \gamma(t) = a$ となるものが存在．

- $\mathbb{R}$ の半代数的集合がなす順序極小構造の場合は，Milnor が幾何的手法を用いて示した．
- R が順序加法群とは限らないときは反例がある．

Derivative

順序極小構造 $(R, <, \mathcal{S})$ に対し，さらに R は順序体であるとし，体の演算 $+, \times$ が定義可能であると仮定する．
（このとき，前に述べたように R は実閉体である．）
定義可能函数 $f\colon (a,b) \to R$ の $x = c$ における微分係数を以下で定義：

$$f'(c) := \lim_{t \to 0} \frac{f(c+t) - f(c)}{t}$$

$\mathbb{R}$ 上の解析学と同様に，導函数や C^r 級といった概念が定義でき，Leibniz 則・平均値の定理などが成立する．

Derivative

さらに，順序極小性の著しい帰結として以下が成立する．

Theorem

$r \in \mathbb{N}$ を fix する．任意の定義可能函数 $f\colon (a,b) \to R$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ と $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N < a_{N+1} = b$ が存在して以下を満たす：

各区間 (a_i, a_{i+1}) $(0 \leq i \leq N)$ 上で f は C^r 級．

この他にも，逆函数定理・陰函数定理や
"C^r-cell decomposition theorem" などが成立し，定義可能函数に対する微分の理論を展開することができる．
（積分はシラネ）

順序極小理論のメリット

- 定義は単純だが豊富な幾何的性質を持ち，なおかつ実代数幾何周辺の既存の結果を包括する理論である．
- $\mathbb{R}$ の完備性を用いた議論は，順序極小構造においては definable completeness によって代替できる．
- モデル理論との結び付きが強く，数理論理学の手法を持ち込みやすい枠組みになっている．
- 適用できる構造の種類が豊富
  - 台集合が $\mathbb{R}$ とは限らず，任意の稠密線型順序集合や実閉体上で一般論が展開される．
  - 取り扱いたい函数を定義可能函数として含むよう，十分豊富な順序極小構造を取ることが多くの場合で可能．
  - 量化記号消去を持たなくても順序極小性は持つ構造が多く，実用上便利．
- 代数トポロジーにも新しい視点を提供してくれる（Euler 標数，o-minimal (co)homology，o-minimal homotopy など）．

Pila-Wilkie Counting Theorem

Pila による，順序極小理論を用いた Diophantus 幾何の研究の一端を紹介する．

Definitions

(1) **有理数の高さ函数** $H\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ を以下で定義：
$x \in \mathbb{Q}$ を既約分数 $x = a/b \ \ (a, b \in \mathbb{Z}, b > 0)$ で表したとき，

$$H(x) := \max\{\,|a|, b\,\}$$

とする．ただし，$H(0) := 0$ とする．

(2) 上の H を以下のように $H\colon \mathbb{Q}^n \to \mathbb{N}$ に拡張する：
$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n$ に対して，

$$H(\bar{x}) := \max\{\,H(x_1), \ldots, H(x_n)\,\}$$

Pila-Wilkie Counting Theorem

Definitions

(1) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して，$X(\mathbb{Q}) := X \cap \mathbb{Q}^n$（有理格子点全体）．

(2) $T \geq 1$ に対して，$X(\mathbb{Q}, T) := \{\, P \in X(\mathbb{Q}) \,;\, H(P) \leq T \,\}$．

(3) X の density function $N(X, T) := \# X(\mathbb{Q}, T)$ （有限の値であることに注意）．

Definition

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して，X に含まれる 1 次元以上の連結半代数的集合たちの和集合を X の algebraic part とよび X^{alg} で表す．また，$X \setminus X^{\mathrm{alg}}$ を X の transcendental part と言う．

Pila-Wilkie Counting Theorem

以下では $\mathbb{R}$ 上の順序極小構造として，任意の半代数的集合が定義可能集合であるようなものを固定して考える．

Theorem (Pila-Wilkie[3], 2006)

任意の定義可能集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ と $\varepsilon > 0$ に対して，ある実数 $c(X, \varepsilon) > 0$ が存在して以下が成立：

任意の $T \geq 1$ について，$N(X \setminus X^{\mathrm{alg}}, T) \leq c(X, \varepsilon) T^{\varepsilon}$．

この定理の証明は，定義可能集合および定義可能函数の "(re)parametrization" の存在という幾何的な性質に大きく依っている．そして，この "(re)parametrization" の存在を示すのに順序極小理論やモデル理論が効果的に使用されるのである．

まとめ

- $\mathbb{R}$ の代わりに任意の実閉体 R を数学の基盤としても（病的な例を除けば）普通の数学を再現できる
- 通常の実代数幾何・実解析幾何の代わりに，任意の実閉体（特に超実数体）上の幾何を考えることが（原理的には）可能

$\mathbb{R}$ に固執せずに，柔軟に順序極小構造を使おう！

参考文献について

本講演の内容をより深く理解したいという方は，以下を参照することをおすすめする：

- 実体・実閉体に関する基本的な性質：
  さわら [6]，より詳しくは藤崎 [7, 五章]
- モデル理論的側面（RCF の完全性・量化記号消去など）：
  Marker [2, Ch. 3]
- 順序極小構造：van den Dries [5]

特に van den Dries [5] は，順序極小構造の基本的な文献でありながら，実閉体の理論やモデル理論の予備知識を仮定せずに self-contained に書かれている良書だと思う．

参考文献 I

[1] Norbert A'Campo, Lizhen Ji, and Athanase Papadopoulos. *On Grothendieck's Tame Topology*. Mar. 9, 2016. arXiv: `1603.03016 [math.GT]`.

[2] David Marker. *Model Theory: An Introduction*. Graduate Texts in Mathematics 217. Springer-Verlag, 2002.

[3] Jonathan Pila and Alex James Wilkie. "The Rational Points of a Definable Set". In: *Duke Mathematical Journal* **133**.3 (2006), pp. 591–616.

[4] Bruno Poizat. *A Course in Model Theory: An Introduction to Contemporary Mathematical Logic*. English. Trans. **fromFrench** by Moses Klein. Universitext. Springer-Verlag, 1985. This English edition was published in 2000.

参考文献 II

[5] Lou van den Dries. *Tame Topology and O-minimal Structures*. London Mathematical Society Lecture Note Series 248. Cambridge University Press, 1998.

[6] さわら. 実体の実体. Math Advent Calendar 2015 の第 22 回. Dec. 23, 2015. URL: https://www.dropbox.com/s/iuovzhilooeqirk/%E5%AE%9F%E4%BD%93%E3%81%AE%E5%AE%9F%E4%BD%93.pdf.

[7] 藤﨑 源二郎. 体とガロア理論. 岩波基礎数学選書.

[8] @alg_d. 閻空間 $\mathbb{R}$ の性質: 第 5 回関西すうがく徒のつどい 2 日目. Togetter. Sept. 14, 2014. URL: http://togetter.com/li/719312.