Is the order the $L^{p(\cdot)}$?

The yamaD[*]

1 Introduction

Notation.
本講演を通して, dx は Lebesgue 測度とし, 考える函数は全て可測函数であるとする.

函数の成す空間を考える $\cdots$ 函数解析学.

L^p-Space
$1 \leqslant p < \infty$ に対して,

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \left\{ u : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty] \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

と定める. (ただし a.e. の一致を同一視する) $p = \infty$ ならば,

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) := \left\{ u : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty] \;\middle|\; \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| < \infty \right\}$$

と定義し, この空間に対してノルム $\| \cdot \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ を

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leqslant p < \infty) \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| & (p = \infty) \end{cases}$$

と定義する.

THEOREM.
$(L^p(\mathbb{R}^n), \| \cdot \|_{L^p(\mathbb{R}^n)})$ は Banach 空間である. 特に, $p = 2$ ならば Hilbert 空間となる.

---

[*]本講演の内容について, ご指摘, 及び詳しいことが知りたい, ということがございましたら, 以下のメールアドレスまでご連絡ください. `akutagawawawawa@`(以下 Gmail)

Variable Exponent

定数指数を "函数化"するという一般化を試みる. つまり, $p : \mathbb{R}^n \to [1,\infty]$ を μ-可測函数として, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ のような函数空間を考えてみよう. とりあえずそのままいけば,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p(x)}\, dx < \infty$$

となる函数 u の成す空間ということになる.

事の発端としては $\cdots$

'31 W. Orlicz, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{p_i}$ が収束する実数列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ の空間の研究.

いったい, どうやったら "意味のある"空間を定義できるだろうか.

なお, "variable exponent"で Math Sci Net (Math. Review) に検索をかけてみると,
2000 まで $\cdots$ 18 件.
2001 から 2005 まで $\cdots$ 47 件.
2006 から 2010 まで $\cdots$ 299 件.
2011 から 2015 まで $\cdots$ 554 件.

2 Musielak-Orlicz Space

変動指数函数空間を定義する一般的な枠組みを考える.

DEFINITION.
$\varphi : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to [0,\infty]$ が一般化 Φ-函数であるとは, 次を充たすことである:
(i) : 各 $t \geqslant 0$ に対して $\varphi(\cdot, t)$ が $\mathbb{R}^n$ 上の μ-可測函数,
(ii) : 任意の $y \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\varphi(y, \cdot)$ は左連続函数な凸函数であって,

$$\varphi(0, y) = 0\,,\ \lim_{t \downarrow 0} \varphi(y,t) = 0\,,\ \lim_{t \to \infty} \varphi(y,t) = \infty$$

を充たす.

EXAMPLE.
以下の函数はすべて一般化 Φ-函数である.

$$\varphi_p(t) = t^p\,,\ \varphi_\infty(t) := \begin{cases} 0 & t \in [0,1] \\ \infty & t \in (1,\infty) \end{cases}\,,\ \varphi_{p(x)}(t) = \begin{cases} t^{p(x)} & p(x) < \infty \\ \varphi_\infty(t) & p(x) = \infty \end{cases}.$$

DEFINITION.
φ を一般化 Φ-函数として, u を $\mathbb{R}^n$ 上の μ-可測函数とするとき,

$$\text{函数 } y \mapsto \varphi\bigl(y, |u(y)|\bigr)$$

は μ-可測函数となるので,

$$\varrho_\varphi(u) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\bigl(y, |u(y)|\bigr)\, dy$$

なる汎函数 ϱ_φ を定めることができる. (Semimodular という.) これをもとに, 函数空間 $L^\varphi(\mathbb{R}^n)$ を

$$L^\varphi(\mathbb{R}^n) := \Bigl\{ u : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty] \Bigm| \varrho_\varphi(\lambda u) < \infty \text{ for some } \lambda > 0 \Bigr\}$$

と定義する, $L^\varphi(\mathbb{R}^n)$ を, Musielak-Orlicz 空間という.

一般化 Φ-函数 φ に対して, Musielak-Orlicz 空間 $L^\varphi(\mathbb{R}^n)$ が決まる, ということがポイント.

$L^\varphi(\mathbb{R}^n)$ 上のノルム $\|\cdot\|_{L^\varphi(\mathbb{R}^n)}$ を,

$$\|u\|_{L^\varphi(\mathbb{R}^n)} := \inf\Bigl\{ \lambda \geqslant 0 \Bigm| \varrho_\varphi\Bigl(\frac{u}{\lambda}\Bigr) \leqslant 1 \Bigr\}$$

と定める. これを, Luxemburg ノルムという.

THEOREM.
$(L^\varphi(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^\varphi(\mathbb{R}^n)})$ は Banach 空間である.

EXAMPLE.
上の例に表れる一般化 Φ-函数について,
・φ_p を用いると, $L^{\varphi_p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.
・φ_∞ を用いると, $L^{\varphi_\infty}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
　このように, 古典的な函数空間は特別な場合として実現できる.

Semimodular and Luxemburg Norm

THEOREM. (Unit Ball Property)

$$\varrho_\varphi(u) \leqslant 1 \iff \|u\|_{L^\varphi(\mathbb{R}^n)} \leqslant 1.$$

Proof. $\varrho_\varphi(u) \leqslant 1$ とすれば, これは $\|u\|_{L^\varphi(\mathbb{R}^n)} \leqslant 1$ が定義より従う.
逆に $\|u\|_{L^\varphi(\mathbb{R}^n)} \leqslant 1$ とすると, 任意の $\lambda > 1$ に対して

$$\varrho_\varphi\Bigl(\frac{u}{\lambda}\Bigr) \leqslant 1$$

となることがわかる. これは, 函数 $\mu \mapsto \varrho_\varphi(\mu u)$ が $(0,\infty)$ 上左連続且つ単調非減少であることによる. よってこのことから

$$\lim_{\lambda \downarrow 1} \varrho_\varphi\left(\frac{u}{\lambda}\right) = \varrho_\varphi(u) \leqslant 1$$

が成り立つ. $\square$

3 A Study in $L^{p(\cdot)}$-Space

$p : \mathbb{R}^n \to [1,\infty]$ を μ-可測函数,

$$\varrho_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}(u) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(x)}\big(|u(x)|\big)\, dx$$

として,

$$\begin{aligned} L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) &:= \Big\{u : \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty] \;\Big|\; \varrho_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}(\lambda u) < \infty \text{ for some } \lambda > 0\Big\} \\ \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} &:= \inf\Big\{\lambda \geqslant 0 \;\Big|\; \varrho_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) \leqslant 1\Big\} \end{aligned}$$

と定義する. p を変動指数, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ を $L^{p(\cdot)}$-空間という.
以下,

$$p^- := \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathbb{R}^n} p(y)\,,\; p^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathbb{R}^n} p(y)$$

とする. このとき, 以下の定理が成立する.

THEOREM.
· $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ は Banach 空間となる.
· 各 $y \in \mathbb{R}^n$ に対して, 変動指数 p, p', s が $\dfrac{1}{s(y)} = \dfrac{1}{p(y)} + \dfrac{1}{p'(y)}$ を充たすとすれば,

$$\|fg\|_{L^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant 2\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ. (Hölder's Inequality.)
· $p^+ < \infty$ のとき,

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) := \Big\{u : \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty] \;\Big|\; \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(x)}\big(|u(x)|\big)\, dx < \infty\Big\}$$

であり, また単函数全体の集合や $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ で稠密となる.
· $1 < p^- \leqslant p^+ < \infty$ のとき, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ は一様凸空間である.
· p, q, r は $p \leqslant q \leqslant r$ を充たす変動指数とするとき, 連続的な埋め込みとして

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) + L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$$

が成立する. 変動指数は定数指数を含むものであるため, $L^{p(\cdot)}$-空間は何らかの定数指数の L^p-空間の和空間にいつでも埋め込むことができることがポイントである.

<u>Maximal Operator</u>

DEFINITION.
函数 $\alpha : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ について, 或る定数 $\alpha_\infty \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$\begin{aligned} |\alpha(x) - \alpha(y)| &\lesssim \frac{1}{\log\left(e + \frac{1}{|x-y|}\right)} \quad (x, y \in \mathbb{R}^n) \\ |\alpha(x) - \alpha_\infty| &\lesssim \frac{1}{\log(e + |x|)} \quad (x \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

が成立するとき, α は大域的 log-Hölder 連続であるという. p を変動指数として, $\dfrac{1}{p(\cdot)}$ が大域的 log-Hölder 連続であるとき, $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ とかくこととする.

μ-可測函数 f に対して, 極大函数 (Maximal Function) Mf を形式的に

$$Mf(x) := \sup_{r>0} ⨍_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

と定義する. 定数指数であれば, $p > 1$ ならば M は L^p-有界であることがよく知られている.

THEOREM. (Diening)
$p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p^-$ ならば,

$$\|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \quad (f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$$

が成り立つ.

$0 < \alpha < n$ に対して, 変動指数 $p^\sharp$ と Riesz ポテンシャル I_α を

$$\frac{1}{p^\sharp(x)} := \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha}{n}\, , \, I_\alpha[f](x) := c(n, \alpha) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

と定義する. ただし, $c(n, \alpha) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ として, これは $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とすると, 緩増加超函数 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ として

$$\mathcal{F}\big(I_\alpha[f]\big)(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \mathcal{F} f(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

が成り立つようにとった定数である. ここで, $\mathcal{F}$ は Fourier 変換である.

THEOREM.
$p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p^- \leqslant p^+ < \dfrac{n}{\alpha}$ ならば,

$$\|I_\alpha[f]\|_{L^{p^\sharp(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ.
この定理は, 所謂 Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式の一般化になっている.

Appendix

· 発表後の質疑応答で Sobolev 空間についての質問があったので, ここで簡単にその導入について紹介しようと思う.
$k \geqslant 1$ とする. p を変動指数, $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とするとき,

$$\varrho_{W^{k,p(\cdot)}(U)}(u) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant k} \varrho_{L^{p(\cdot)}(U)}(D^\alpha u) & \text{if } D^\alpha u \in L^{p(\cdot)}(U) \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する. ここで, 微分作用素は弱微分を指すものであって, α を multi-index とするとき

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}(x) \quad (x \in U)$$

と定める. この Semimodular $\varrho_{W^{k,p(\cdot)}(U)}$ に関する Musielak-Orlicz 空間 $W^{k,p(\cdot)}(U)$ を変動指数 Sobolev 空間と定義する. このとり方から明らかに

$$W^{k,p(\cdot)}(U) = \{u : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty] |\, D^\alpha u \in L^{p(\cdot)}(U) \text{ for each } \alpha \text{ with } |\alpha| \leqslant k\}$$

が成立している. また, Luxemburg ノルムのほかに

$$\|u\|_{W^{k,p(\cdot)}(U)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_{L^{p(\cdot)}(U)}$$

といったどちらかというと自然に定式化されるノルムもあるが, 両者は互いに同値なノルムになる.

滑らかな函数の稠密性や, 拡張作用素の存在, Poincalé の不等式など, 通常成立していた定理や評価も, 変動指数の log-Hölder 連続性を課したりすることによって成立することが確かめられている. $L^{p(\cdot)}$-空間でもそうだが,[1] これら

[1] 例えば極大作用素の有界性とか,

の性質を証明するには, 変動指数の空間を或る適当な定数指数の空間に埋め込んで, そこでよく知られている結果を適用しながら変動指数函数空間へフィードバックする, という流れが常套手段である. つまり, より一般的な変動指数の理論が出来たから今迄の L^p-空間の理論は廃れる, ということではなく, 変動指数の理論はそれを基礎に成り立つものなのだ.

· 極大作用素の有界性の仮定について.
極大作用素の仮定に於いて, $p^- > 1$ としていた. 極大作用素は L^1-有界とはならないことがよく知られている. 有界定数が $p \to 1$ で爆発してしまうのであった. すると, このようなことも考えられる. "変動指数だったらどうだろう. 少しくらい $p(x) = 1$ になったとしてもよいのでは無かろうか." しかし, これについては結果として極大作用素が $L^{p(\cdot)}$-有界ならば $p^- > 1$ でなければならないことが示されている. 無念! [2]

· alg d 氏, 及びぴあのん氏によって実数 $\mathbb{R}$ はクソであることが示されてしまったらしい. しかし, 一方で実数とその完備性は解析学に於いてあらゆる場面で大切で, 重要であると私は思う. 反論するつもりはないが, そんなナンセンスの中から面白く, 素敵な数学, 解析学を捕まえていこうと, 今回のつどいを通してやまだは決意を新たにした. [3]

· 本講演のまとめに替えて, 本研究と学習に対する私の哲学, 動機を述べようと思います. 私は現在, ごちうさ難民であります. 心がぴょんぴょんすること無しに厳しい現実と向き合うのは兎角苦しいものであります. そこで, 数学の力によるごちうさシステム (Gochiusa System) なるシステム (発展方程式) の実現の必要性, 及びその開発の使命感を常日頃から実感しています.

皆さん, 考えてみてください. あらゆる人が

"あ＾〜心がぴょんぴょんするんじゃ＾〜"

と無意識にコメントし, その多幸感を享受できるシステムです. 心がぴょんぴょんしてきませんか.

私はまだそれを捉えるに至ってはおらず, そもそもこの理論によって実現できる, なんて根拠はありません. しかし, ポテンシャルはあると確信しています. 心がぴょんぴょんするシステムを構成するためには, まずは指数がぴょんぴょんする世界で理論を展開する所からはじめてみよう, という試みが, 私の研究と学習に対するに対する最大の動機です.

"Ambitious but Rubbish!"

という言葉[4]を引用する, といったオチで, 本講演を終わります. ご清聴ありがとうございました.

[2] 詳しくは References の 1,3 を参照.
[3] つまり, 難しいことは考えないことにしました. いいもんねーだ.
[4] 某パワー厨達の哲学?

References

1. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents.* Lecture Notes in Mathematics 2017, Springer-Verlag, 2011.

2. D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces.* Applied and Numerical Analysis, Birkhäuser, 2013.

3. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta, T. Shimomura, *Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 34:503-522, 2009.

4. やまだのゼミノート. 2015.