続・闇空間 $\mathbb{R}$ の性質

ぴあのん @piano2683

$\mathbb{R}$ で実数全体がなす順序体を表します。これは皆さんよく慣れ親しんだ構造であって、様々な性質を知っていると思います。しかし、慣れ親しんでいるからといって、その性質が「$\mathbb{R}$ 固有のもの」であると思いこんではいないでしょうか？実は、$\mathbb{R}$ のよく知られた性質の多くは、「$\mathbb{R}$ っぽい体」でも成り立つことが知られています。本講演では、

$\mathbb{R}$ の代数的/幾何的/解析的性質の本質にあるのは、
（$\mathbb{R}$ 固有の性質ではなく）「$\mathbb{R}$ っぽい」性質である

という事実を様々な視点から紹介し、$\mathbb{R}$ に縛られた固定観念から脱却していただくのを目標にします。

もう少し詳しく内容を説明していきましょう。複素数体 $\mathbb{C}$ の抽象化として代数閉体の概念が得られるように、実数体 $\mathbb{R}$ の代数的特徴付けを考えるのは数学者にとって自然なことでしょう。この問題に対する初めての試みが、Artin-Schreier の**実体・実閉体**[*1]の理論です。彼らは $\mathbb{R}$ の抽象化として「実閉体」と呼ばれる概念を考案し、実閉体は $\mathbb{R}$ とよく似た代数的性質を持つことを示しました。この意味で、実閉体は「$\mathbb{R}$ っぽい体」と言えるのです。

Artin-Schreier の理論からしばらくした後、実閉体の理論はロジシャンの手によって大きく発展します。数理論理学におけるモデル理論の手法を用いることで、「任意の実閉体は $\mathbb{R}$ と全く同じ代数的性質を持つ」ということが証明されたのです。モデル理論の観点からは、この定理は「実閉体の公理系が良い性質を持つ」ことを意味します。そして驚くべきことに、この「良い性質」の帰結として、モデル理論の数学への応用が得られるのです。本講演の前半では、以上で述べた $\mathbb{R}$ の代数的性質に関する研究について、

- 実閉体の基本的な性質（モデル理論の言葉を用いない範囲で）
- 「実閉体の公理系の良い性質」の（モデル理論の言葉による）定式化とその応用

をお話しします。

ところで、$\mathbb{R}$ 上の幾何学や解析学には、「代数的な函数」である多項式函数以外に、指数函数などの「代数的でない函数」も登場します。このような函数を用いて定義される（$\mathbb{R}^n$ 内の）図形の幾何的振る舞いは、多項式函数のみを考慮する場合と比較してはるかに複雑で調べづらいものでした。こうした構造に関する研究の中で、「幾何的にうまく振る舞う順序構造」の統一的な枠組みとして考案されたのが**順序極小構造**の理論です。この理論に依れば、順序構造がある種の有限性をもつときに、その構造は幾何的/解析的にうまく振る舞うことが従います。その適用範囲は膨大で、$\mathbb{R}^n$ 上の様々な函数とそれによって定義される図形だけでなく、任意の実閉体上の函数やそれによって定義される図形までも考察対象に含めることができます。さらにここ 10 年程で、ディオファントス幾何における有理点の個数評価の問題に順序極小構造が応用されるなど著しい発展を遂げています。本講演の後半では、順序極小構造の種々の性質と具体例を紹介し、

[*1] 「じつたい」「じつへいたい」と読みます。

$\mathbb{R}$ の幾何的/解析的性質の本質はどこにあるのか？

という問いに対する、現代的な解答をお見せできればと思います。

予備知識

本講演では以下を予備知識として仮定します：

- 実数体 $\mathbb{R}$ の定義と基本的な性質（$\mathbb{R}$ の位相、中間値の定理程度）
- 体論（代数拡大・代数閉体・代数閉包の概念、および有理函数体を知っていること）

さらに欲を言えば、古典代数幾何（代数的集合・構成可能集合について）またはモデル理論（定義可能集合についで）のどちらかに触れたことがあると本講演の理解の助けになるでしょう。実体・実閉体の理論についての知識は仮定しませんが、本講演では証明の大部分を省略します。実体・実閉体に関する基本的な性質の証明は [3] を参照してください。

本講演の内容をより深く理解したいという方は、モデル理論的側面については Marker [2, Ch. 3] を、順序極小構造については van den Dries [1] を参照してください。

参考文献

[1] Lou van den Dries, *Tame Topology and O-minimal Structures*, London Mathematical Society Lecture Note Series 248, Cambridge University Press, 1998.

[2] David Marker, *Model Theory: An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics 217, Springer-Verlag, 2002.

[3] さわら, **実体の実体**, Math Advent Calendar 2015 の第 22 回, Dec. 23, 2015, URL: https://www.dropbox.com/s/iuovzhilooeqirk/%E5%AE%9F%E4%BD%93%E3%81%AE%E5%AE%9F%E4%BD%93.pdf.

[4] @alg_d, **闇空間 $\mathbb{R}$ の性質: 第 *5* 回関西すうがく徒のつどい *2* 日目**, Togetter, Sept. 14, 2014, URL: http://togetter.com/li/719312.