円と三角関数、楕円曲線と楕円関数

@matsumoring

聴衆に一, 二回生を想定して, 三角関数などの「周期的」な関数と図形の対応について話します.

三角関数は実数体 $\mathbb{R}$ 上の周期 2π の周期関数です. なので, 単位円上の関数と思うことができます. これはどういうことかと言うと, 商群 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上の関数だと思うということです. また, sin 関数は $\sin^2 x + (\sin' x)^2 = 1$ という関係式を満たすので, これを使って単位円 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ をパラメータ表示することができます. このパラメータ表示を使って単位円に群構造を入れることができます.

楕円関数は複素数体 $\mathbb{C}$ 上の二重周期を持つ関数です. 周期全体は格子 ($\mathbb{Z}^2$ と同型な離散部分群) になり, トーラス上の関数と思うことができます. これはどういうことかと言うと, 周期格子を Γ と書くと, 商群 $\mathbb{C}/\Gamma$ 上の関数だと思うということです. Weierstrass の $\wp$ 関数は $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2 z - g_3$ という関係式を満たすので, これを使って楕円曲線 $E = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3\}$ を 1 点コンパクト化したものをパラメータ表示することができます. このパラメータ表示を使って楕円曲線にも群構造を入れることができます.

これらの群演算は sin 関数や $\wp$ 関数の加法定理から座標成分の有理式で書けるので, 有理点全体が部分群を成します. 特に楕円曲線上の有理点の成す部分群は数論的に重要なようです.

予備知識については, 前半は一回生程度の解析の知識（一様収束や項別微積分など）と初歩的な群論（商群など）を仮定します. 後半については二回生程度の代数の知識（有限生成 Abel 群の基本定理など）を仮定します.

前半は, まず sin 関数を導入してそれが満たす微分方程式と加法定理を示し, 単位円 S^1 をパラメータ表示できることと, S^1 に群構造を入れることができることを説明します. 次に, Weierstrass の $\wp$ 関数を導入してそれが満たす微分方程式と加法定理を示し, 楕円曲線 E をパラメータ表示できることと, E に群構造を入れることができることを説明します. 三角関数と $\wp$ 関数は無限級数として導入します. 露骨な複素解析の使用は避けます.

後半は, 楕円曲線上の有理点の成す群の構造が数論的な意味を持つ例として, 平方因子を持たない自然数 n が三辺が全て有理数の直角三角形の面積となる（このような数を合同数と言う）ための必要十分条件が楕円曲線 $y^2 = x^3 - nx$ の有理点の成す群の階数が 1 以上であることについて説明する予定です.

時間があれば, 被覆空間の一般論を話して「単連結な Riemann 面は Riemann 球面か複素平面か単位円板に正則同型である」という Koebe の一意化定理を紹介し, 任意の代数曲線（＝閉 Riemann 面）が D/Γ（ただし D は上の 3 つのいずれかで Γ はもとの代数曲線の基本群）という商表示を持つという方向に話を進めたいという気持ちもあります.