巨大基数入門〜可測基数を巡って〜

Eureka GAP

2016/1/15

概要

基数とは何でしょうか？それは，集合の大きさ（濃度）を表すような集合です．巨大基数とは何でしょうか？それは，その存在の無矛盾性すら示せないほど「巨大」な基数のことです．巨大基数にもいろいろありますが，今回はその中でも可測基数（measurable cardinal）とよばれる巨大基数を紹介したいと思います．1930 年頃，Banach の測度問題とよばれる次のような問いがありました：集合 X と X 上の関数 $m : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ で，

(1) $m(X) = 1$

(2) すべての $x \in X$ に対して $m(\{x\}) = 0$

(3) 互いに交わらない $X_n : n \in \mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して，$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \sum_{n\in N} m(X_n)$

が成り立つようなものは存在するか？ 1930 年，これに肯定的な答えを与える集合 X として，Ulam は可測基数という概念を見出し，それが先の意味で「巨大」であることを示しました．当時は予想もできなかったことでしょうが，その後 30 年も後になって可測基数は巨大基数の理論において最も重要な立ち位置を占めるようになるのです．

今回の発表では，特に集合論に関する知識を仮定しません．むしろ集合論を知らない方にも巨大基数の楽しさが伝わるような発表を心掛けたいと思います．