Urysohn の距離化定理とその周辺

@iClaymore

ご存知であろうが，Urysohn の距離化定理とは，位相空間について，その位相を定めるような距離が存在する(このとき位相空間は距離化可能であるという)ための十分条件の一つを与えるものである．この定理の述べるところによれば，空間が第二可算正則 Hausdorff であることは可分かつ距離化可能であることと同値である．

本講演ではこの定理を，空間を Hilbert 立方体(単位閉区間の可算直積で，これは距離化可能である)に埋め込むやり方で証明する．多くの位相の教科書では表に出てこないが，完全正則という空間のクラスがあり，完全正則空間は単位閉区間の直積に埋め込まれる．さらに第二可算を課せば，直積の添字集合を削ることができ，可算直積に埋め込まれることがわかる．あとは正則第二可算空間が完全正則となることを示せばよい(有名な Urysohn の補題がここで用いられる)．これが証明の流れである．

さて，ではさらに直積される数を減らして，可分距離空間を単位閉区間の有限直積に埋め込むことはできるだろうか．これは一般にはできない．だが，一般の位相空間に次元という位相不変量が定義され，n 次元可分距離空間は単位閉区間 2n+1 個の直積に埋め込まれることがわかっている. ちょうど，n 次元第二可算多様体が 2n+1 次元 Euclid 空間に埋め込まれるようにである(ちなみに n 次元多様体は位相空間として n 次元である)．この n 次元可分距離空間の埋め込み定理の証明も，私が好きなので追いたいと思う．

他の分野でもそうであろうが，位相空間論において具体例は重要である．条件を落としたときなどの反例や定理の適用例を豊富に用意しよう．

余力があれば，空間が距離化可能であるための必要十分条件を与える種々の定理も紹介するかもしれない．

予備知識としては，大学の，(集合と)位相を扱う講義を理解できていれば，またはそのような本を一冊読めていれば十分である．