Is the order the $L^{p(\cdot)}$?

The yamaD

本講演では, 解析学に於いて幅広く調べられている L^p-空間の一般化である, 変動指数函数空間 $L^{p(\cdot)}$-空間について紹介したいと思います.

L^p-空間は, 多くの良い性質を備えている重要な函数空間の一つで, またノルムが定まっていることから函数解析学の理論を通して構造が解析されています. 今日の調和解析や微分方程式論の舞台の一つでもあります. そんな L^p-空間を一般化した枠組みの一つを与えるのが, $L^{p(\cdot)}$-空間であります.

やりたいことはどういうことか, ざっくりと説明します. $1 \leqslant p < \infty$ に対してならば

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \, dx < \infty$$

を充たす可測函数 $u : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ は, p 乗可積分であるといいます. $p = \infty$ に対してならば, 本質的に有界な函数を考えることになります. 既存の L^p-空間の概念は, そのような函数全体を考えることとなっています. そこで, 指数 p を定数ではなく函数に置き換えて一般化を試みよう, 即ち $p : \mathbb{R}^n \to [1, \infty]$ として,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p(x)} \, dx < \infty$$

となる可測函数 u 全体の空間について解析しよう, ということが主な目的であります.

見た目はとてもシンプルな一般化であるにもかかわらず, 詳しい解析が成されるようになったのは, 実はここ 25 年ほど前からであります. 本講の目的は, その様な近年注目を集めている変動指数函数空間の理論について, その性質と魅力を紹介する事であります. 内容としては, 函数空間をどのように構成し, 如何に既存の概念を一般化するかといったことを説明いたします. 詳細な証明等はほとんどできませんが, 雰囲気だけでも伝えられればと思います. 積分論について理解があれば充分でありますが, 集合や函数についての理解があればおよそ問題は無いと思います.

References

[1] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents.* Lecture Notes in Mathematics 2017, Springer-Verlag, 2011.