曲面上のリッチフロー

@NARUOHA

クレイ数学研究所によって 2000 年に発表された 7 つのミレニアム懸賞問題、そのうち唯一解決されたのがポアンカレ予想です。今回の講演では、そのポアンカレ予想とはどういうものなのかを説明し、実際に証明してみようと思います。嘘です。証明知りません。ですが、ポアンカレ予想の証明における主要なアイデアであるリッチフローの概略について説明したいと思います。

ポアンカレ予想とは幾何学で扱う基本的な対象である「多様体」と呼ばれる空間の分類に関わる定理で、「単連結な n 次元閉多様体は n 次元球面に同相である」というものです。ここで、単連結というのは簡単にいうと、「穴があいていない」ということです。例えば球面は単連結ですがトーラス(ドーナツの表面)は単連結ではありません。つまり、ポアンカレ予想は穴のあいていない閉じた多様体は球面だけ、と主張しているのです。これを直感的に明らかだと思われる方もいるかもしれませんが、2002 年にペレルマンにより n=3 の場合に解決されるまで、未解決問題であり続けました。そしてペレルマンによる証明は、リッチフローと呼ばれるものを用いた微分幾何学(固い幾何学)的な手法によるものでした。

リッチフローとは、リーマン多様体（固い多様体）上の計量に関する方程式のことです。リッチフローに似た方程式として物理学の熱方程式があります。暖かい部屋の中に冷たい空気が入ってきたとしましょう。その際初めは温度にむらがありますが、充分長い時間をかけると熱運動方程式によって部屋の中は一定の温度になります。同様にリーマン多様体にも、出っ張っている部分、平坦な部分、反り返っている部分があります。これを時間が変数の微分方程式によって変形させていくことにより“きれいなリーマン多様体”にできないか、というのがリッチフローのアイデアです。三次元多様体の場合はこれだけではうまくいかず、さらなるアイデアが必要になるそうなのですが、二次元多様体では Hamilton や Chow によって示された美しい定理があるので、その主張と証明の概略を紹介できればと思います。

この講演の前提としては、多様体の基本をある程度仮定いたしますが、微積分の基本的なことだけでも話の筋がわかるようにお話ししたいと思います。リッチフローによって多様体が美しく変形されていく様子を一緒に体感しましょう！

参考文献

1 Chow and Knopf, The Ricci Flow: An Introducion
2 J.ミルナー　モース理論