曲線と曲面の代数幾何
〜因子と交叉理論，そして極小モデル理論〜

早稲田大学基幹理工学部数学科 4 年　@waheyhey

代数幾何は射影空間をキャンバスとする座標幾何であり，基礎の習得が難しいと噂される一方で，種々の概念の意味を大まかに理解することはさほど難しくありません．実際，多項式とベクトル空間の線形代数を用いて具体的な例を扱ってしまえば，“代数幾何は現代数学の中でもとりわけ抽象的な学問だ”という誤解はきれいに取り払われるでしょう．前回のつどいでは，モジュライという概念の意味と有用性を説明した後，その最もポピュラーな例である Grassmann 多様体の構成を例にとって，モジュライの大域的な構成法である幾何学的不変式論のアイディアを紹介しました．今回は代数幾何の問題の中でも特に伝統的で歴史が古い代数曲面論にまつわるテーマをいくつか紹介したいと思います．（タイトルには「曲線と曲面の」とありますが，これは有名な微分幾何の教科書の名前のオマージュで，実際は曲面を中心とした話になります．）

一般に，複素 1 次元と複素 2 次元の多様体を扱う代数幾何を低次元代数幾何といいます（本当はいわないかもしれない）．1 次元の場合が代数曲線論です．この場合は閉リーマン面の理論および 1 変数代数関数体の理論との対応や，種数 1 の曲線すなわち楕円曲線の理論などで馴染みのある方が多いのではないでしょうか．代数曲線に関する面白い話題は沢山ありますが，誤解を恐れずにいえば，代数曲線論は「変なことが起きにくい，大人しい」理論です．これが 1 次元上がって 2 次元の代数幾何学，すなわち代数曲面論になると，状況はグッと複雑になります．例えば，曲線の部分多様体は点の集まりですが，代数曲面になると部分多様体に曲線が出てきます．実は代数曲面を調べるために重要な役割を果たすのがその曲線たち，因子です．代数曲面の上の曲線にはどのようなものがあり，またそれらは互いにどう交わるのかを調べることで，代数曲面の隠れた性質を明らかにすることができます．今回はこのことを 1 回生にも分かるように易しく，そして 4 回生にも楽しんでいただけるように本質的で美味しい部分をギュッと凝縮して紹介したいと思います．曲面の交叉理論は 3 次元以上の高次元代数幾何を展開する上でも常に参考にされる，いわば代数幾何の「お手本」です．

代数曲面は代数曲線に比べて非常に “数”が多くなります．そこで代数曲面を分類するには，まず代数曲面全体をざっくりとグループ分けし（双有理幾何学，極小モデル問題），その後に各グループでの分類問題（モジュライ問題など）を考えるのが自然な流れでしょう．この前半に当たる「ざっくりとしたグループ分け」に関してもお話程度に紹介したいと思います．

参考文献

[1] L. Badescu, “Algebraic Surfaces”, Sprnger, 2000.
[2] W. Fulton, “Intersection Theory”, Springer, 1980.
[3] R. Hartshorne, “Algebraic Geometry”, GTM 52, Springer, 1977.
[4] S. Mori, J. Kollár, “Birational Geometry of Algebraic Varieties”, CTM 134, Cambridge Univercity Press, 1998.