代数学の基本定理でみる数学の世界

すうさん@k1ito

2015 年 9 月 23 日

概要

代数学の基本定理とは以下の様なものです.

定理. 次数が 1 以上の任意の複素係数一変数多項式には複素根が存在する.

代数学の基本定理の証明については,18 世紀から 19 世紀にかけて Euler,D'Alembert,Lagrange,Laplace などが論文を書いており,1816 年に Gauss が初めて完全な証明を与えました. 今日では他の分野の結果を用いたたくさんの証明が与えられており, 今回の発表ではその証明のうちの幾つかを紹介します. 例えば解析的なコンパクト集合上の連続関数は最小値を持つことを用いた証明, 複素解析的な Liouville の定理や Rouché の定理を用いた証明, 線形代数と複素解析の定理を組み合わせた証明, 写像度を用いた代数トポロジー的な証明,Gauss-Bonnet の定理を用いた微分幾何的な証明, さらには確率論の定理を用いた証明などもあります. さらに, 代数学の基本定理はそもそも体論における定理と考えることができ, この定理とともに代数・幾何・解析の分野を見て回ることができます.

今回の発表では全く予備知識を仮定せず, 厳密な証明よりも各分野がどのようなことを扱っているかや数学科で行われている講義の内容を俯瞰することを目標としています. その意味では高校生や学部 1,2 年生など数学を専門としていない人向けの内容でしょう. また, 予備知識があればあるほど, 代数学の基本定理の奥深さや面白さを実感できることもできます. ですので, どなたでもご気軽にご清聴ください.

当発表は概論的な発表ですので、参考文献を 1 冊にまとめることは出来ませんが、例えば [1][2] は代数学の基本定理の歴史的な内容について詳しく触れてあります. また解析的な内容については [3], 複素解析的な内容については [4], 位相幾何的な内容については [5][6][7], 微分幾何的な内容については [8][9], 代数的な内容については [10], 確率論的内容

については [11] が参考になります.

参考文献

[1] Heinz-Dieter Ebbinghaus et al. *Numbers.* Springer-Verlag, New York ; Tokyo, c1990 1990.

[2] Benjamin Fine and Gerhard Rosenberger. *The fundamental theorem of algebra.* Springer, New York, c1997 1997.

[3] 杉浦光夫. 解析入門. 東京大学出版会, 東京, 1980.3-1985.4 1980.

[4] Lars Valerian Ahlfors. *Complex analysis : an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.* McGraw-Hill, New York ; Tokyo, 3rd ed edition, c1979 1979.

[5] John Willard Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint.* Princeton University Press, Princeton, N.J., rev. ed edition, 1997 1997.

[6] 枡田幹也. 代数的トポロジー. 朝倉書店, 東京, 2002.2 2002.

[7] Albrecht Dold. *Lectures on algebraic topology.* Springer, Berlin, c1995 1995.

[8] 小林昭七. 曲線と曲面の微分幾何. 裳華房, 東京, 1977.8 1977.

[9] 今野宏. 微分幾何学. 東京大学出版会, 東京, 2013.10 2013.

[10] 藤崎源二郎. 体とガロア理論. 岩波書店, 東京, 1991.4 1991.

[11] 伊藤清. 確率論. 岩波書店, 東京, 1991.5 1991.