複数点の幾何・その 2

ペンパ石 @PPSPSSSPPP

1940 年、Ramanujan が入院していた療養所へ Hardy がタクシーを使って見舞いに行きました。そのタクシーのナンバーは 1729 で、Hardy はその数に特徴がないと思い、なにか良からぬことが起きるのではないかと心配していたそうです。しかしそれを Ramanujan に伝えたところこう答えたそうです：「いや、それは非常に面白い数です。2 通りの 2 つの立方数の和として表される最小の数ですから」

この Ramanujan の主張を式にして表すと、こういうことです：

$$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3.$$

これは言い換えると、整数の四つ組 $(12, 1, -9, -10)$ が $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0$ を満たすことを主張しています。見てわかるように、この方程式はかの有名な Fermat–Wiles の定理に現れる方程式 $x^n + y^n = z^n$ と似た形になっています。

さて今回の講演は何かというと、$x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0$ を満たす整数 x, y, z, w を**すべて**発見してしまおうではないか、という話です。Fermat–Wiles の定理の難しさを考えると、そんなことができるのかとも思えてくるでしょう。この際に役立つのが前回の講演で現れた複数点の幾何、および線形系のアイデアなのです。

というわけで今回は前回説明できなかった**曲面論**と複数点の幾何の話をつなげたいと思います。完全な説明は交叉理論などを含むためできませんが、骨子を伝えることを目標にします。なお前回の続きのようなタイトルになっていますが、前回を聞いていなくても理解できるように配慮はするつもりです。しかし前提知識として、線形代数と、射影空間への慣れがあることは仮定したいです。

この講演は全般的に [2] に依っています。このテーマを教えてくださった方々に感謝します。

References

[1] A. Beauville, *Complex Algebraic Surfaces*, No. 34, Cambridge University Press, 1966.

[2] N. Elkies, Complete cubic parametrization of the Fermat cubic surface. http://www.math.harvard.edu/~elkies/4cubes.html.

[3] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., **52**, Springer, New York, 1977.