

楕円関数とおもしろい応用

@matsumoring

楕円関数とその応用を紹介します。

楕円関数は Gauss や Abel, Jacobi などが研究したいわば「数学の王道」のようなものではないかと思いますが、触れる機会が少ないような気がします。この講演では、具体的な楕円関数をいくつか紹介してその性質を調べます。また、楕円関数はたくさんおもしろい応用を持つのでそのうちのいくつかを紹介します。

前半は、高校までの微積分の知識だけを前提に、定積分を使って色々な楕円関数を導入します。まずは雛型として、円の弧長を使って三角関数を定義し、その周期性と加法定理をみます。次に、円の代わりにレムニスケートを使うことによってレムニスケート関数 sl と cl を導入し、これが三角関数と同じく周期性と加法定理を持つことをみます。レムニスケート関数は三角関数と同じく周期関数ですが、定義域を複素数に拡張するともう1つ複素数の周期を持つことがわかります（これは三角関数にはない性質です）。さらに単振り子の振動を基に Jacobi の楕円関数 sn , cn , dn を導入し、二重周期性と加法定理を示します。おもしろい結果として、 1 と $\sqrt{2}$ の算術幾何平均が円周率とレムニスケート周率の比に等しいという定理を証明します（私はこの定理を最初に知ったとき仰天しました）。

後半は、複素解析の知識（留数定理くらいまで）を前提に、二重周期を持つ有理型関数（楕円関数のこと）の性質を調べます。与えられた二重周期をもつ \wp 関数を構成して加法定理を示し、これが楕円曲線の群構造に対応していることを説明します。最後に、Jacobi の楕円関数を整関数 $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_0$ の比で表し、これら ϑ 関数の満たす関数等式を使って、「与えられた自然数 n を4つの整数の平方和として表す方法は、 n の4で割れない正の約数の和の8倍通りある」という数論の定理を証明することを目標にします。