双曲平面のモデルと初等幾何

2015.3.14

ring

目標

- 双曲平面上の幾何学の公式をおもしろいと思ってもらえること

- この講演を聞いて家に帰ったあとに「双曲平面の上でいろいろ計算してみよう」と手を動かしてもらえること

内容

- 双曲平面のいろいろなモデルの紹介

- 双曲平面上の三角法

- 双曲平面上の三角形の面積の公式

※高校3年生～大学1回生向けです。
予備知識は微分積分と線形代数、
あとは複素平面です。

§0 準備

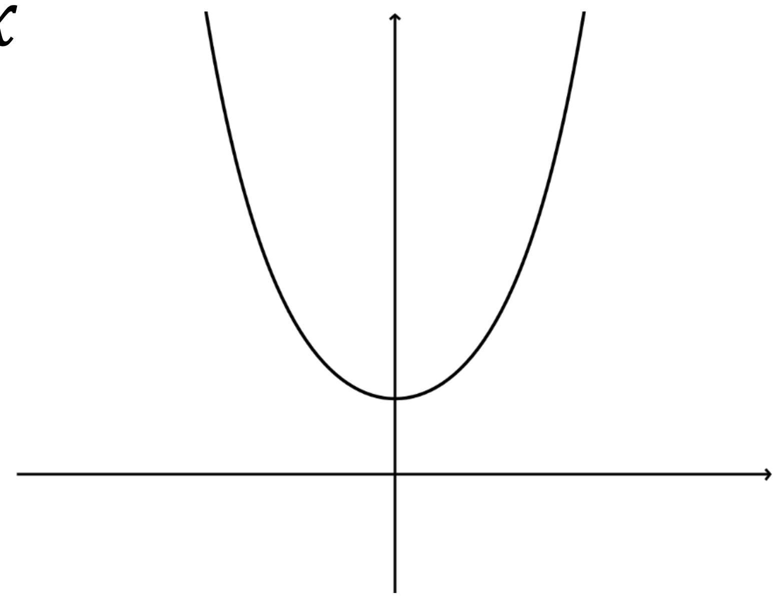
準備1
双曲線関数

双曲線関数の定義

- 双曲線関数を次のように定義する。
  - $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = \cos it$
  - $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = -i \sin it$
  - $\tanh t = \dfrac{\sinh t}{\cosh t} = -i \tan it$

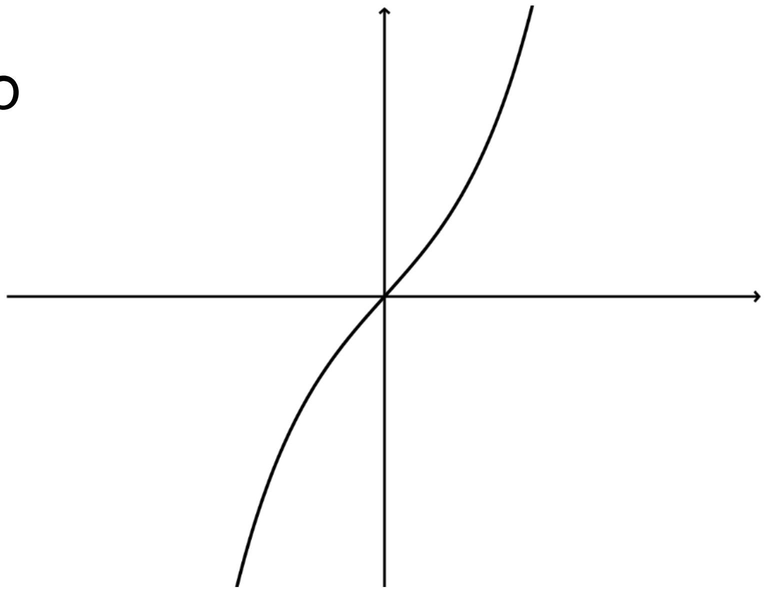
双曲線関数のグラフ1

- $y = \cosh x$
  - $\cosh 0 = 1$
  - $\cosh(-x) = \cosh x$
  - $\cosh x \geq 1$



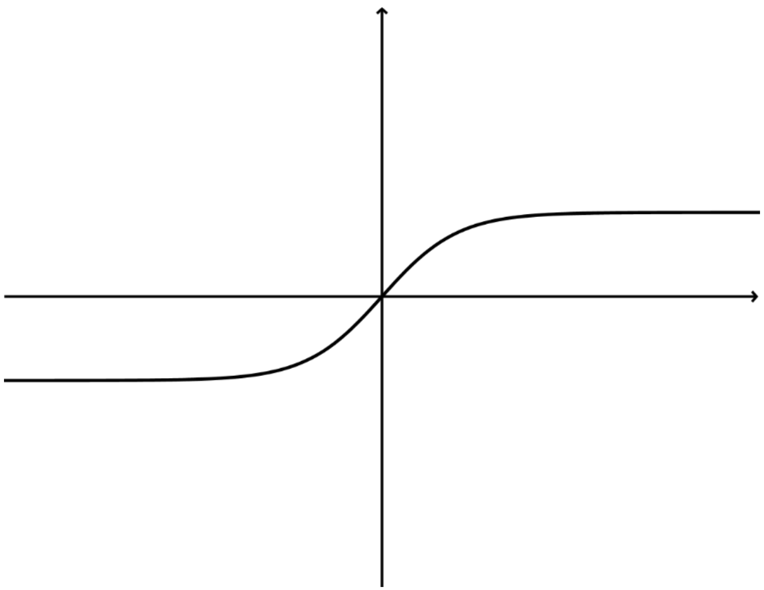
双曲線関数のグラフ2

- $y = \sinh x$
  - $\sinh 0 = 0$
  - $\sinh(-x) = -\sinh x$
  - $-\infty < \sinh x < \infty$



双曲線関数のグラフ3

- $y = \tanh x$
  - $\tanh 0 = 0$
  - $\tanh(-x) = -\tanh x$
  - $-1 < \tanh x < 1$

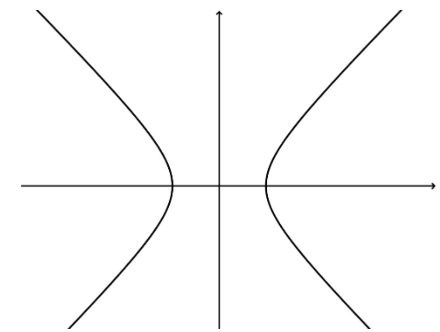


双曲線関数の公式1

- 基本的な関係式

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

  - 双曲線をパラメトライズしている。



- 次の形でもよく使う。

$$1 - \tanh^2 t = \frac{1}{\cosh^2 t}$$

※三角関数の公式から導ける。

双曲線関数の公式2

● 微分の公式

- $(\cosh t)' = \sinh t$
- $(\sinh t)' = \cosh t$
- $(\tanh t)' = \dfrac{1}{\cosh^2 t}$

✓三角関数と違ってマイナスが出てこない。

※三角関数の公式から導ける。

双曲線関数の公式3

●逆関数の微分の公式

- $(\cosh^{-1} t)' = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$　　（$\cosh^{-1} t > 0$とした）
- $(\sinh^{-1} t)' = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$
- $(\tanh^{-1} t)' = \dfrac{1}{1-t^2}$

✓数Ⅲでやっていた。

※一応三角関数の公式から導ける。

双曲線関数の公式4

● 加法定理

- $\cosh(s+t) = \cosh s \cosh t + \sinh s \sinh t$
- $\sinh(s+t) = \sinh s \cosh t + \cosh s \sinh t$
- $\tanh(s+t) = \dfrac{\tanh s + \tanh t}{1 + \tanh s \tanh t}$

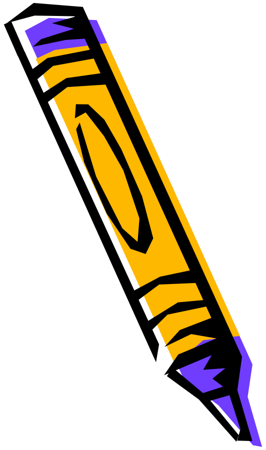
✓これもマイナスが出てこない。

※三角関数の公式から導ける。

双曲線関数のTaylor展開

- 双曲線関数は以下のように展開できる。
  - $\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots \fallingdotseq 1 + \frac{t^2}{2}$
  - $\sinh t = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots \fallingdotseq t$
    - ✓指数関数のTaylor展開の偶数、奇数部分。
    - ✓hyperbolic tangentは難しい。

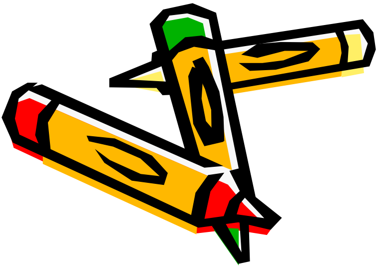
準備2
第一基本形式



曲線の長さ

- 曲線$\boldsymbol{c}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$の長さは速さの積分。

$$\int |\dot{\boldsymbol{c}}| dt = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$



曲面上の曲線の長さ

- 曲面を$\boldsymbol{p}(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix}$とすると、曲面上の曲線は$\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{p}(u(t), v(t))$の形になる。

- $\boldsymbol{c}(t)$の速さは次の式で与えられる。

$$|\dot{\boldsymbol{c}}|^2 = \boldsymbol{p}_u^2 \dot{u}^2 + 2(\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_v)\dot{u}\dot{v} + \boldsymbol{p}_v^2 \dot{v}^2$$

※$\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$は$\boldsymbol{p}$の$u, v$による偏微分。

曲面の第一基本形式

- $E = \boldsymbol{p}_u^2, F = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_v, G = \boldsymbol{p}_v^2$とおくと曲面上の曲線の長さは次のように書ける。

$$\int \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\, dt$$

- 以下のものを曲面の第一基本形式と言う。

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

曲面上の領域の面積

- $\boldsymbol{p}_u$と$\boldsymbol{p}_v$で張られる平行四辺形の面積は

$$|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

（公式$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$より）

- 曲面上の領域Dの面積は

$$\iint_{\boldsymbol{p}^{-1}(D)} \sqrt{EG - F^2}\, du dv$$

…第一基本形式から計算できる。

Gaussの驚異の定理

- Gauss曲率という量は、曲面がどのように空間に埋め込まれているかという情報(第二基本形式)を用いて定義されるが、実は曲面に内在的な量(第一基本形式)のみで定まる。
  - 平面と円柱は違う形をしているが、どちらもGauss曲率は0。
    - ✓紙の幾何学と鉄の幾何学。

J.C.F.Gauss
(1777~1855)

Riemann幾何学

- 「曲面の第一基本形式を計算する」の逆に、「第一基本形式を基に幾何学ができる」。
  - Riemannの講師就任講演のアイデア。
- この考えに基づき双曲平面のモデルを構成。

G.F.B.Riemann
(1826~1866)

準備3
一次分数変換

一次分数変換

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\boldsymbol{C})$に対し

$$T_A z = \frac{az+b}{cz+d} \quad (z \in \boldsymbol{C})$$

で定まる変換を一次分数変換という。

  - 定数倍だけ異なる行列は同じ変換を定める。

- $GL_2(\boldsymbol{C})$は$\boldsymbol{C}$に作用している。

$$T_A T_B = T_{AB}$$

一次分数変換の性質

- 複素数だけではなく∞も込めて定義できる。
  - 実はRiemann球面上の変換。
- 円を円に写す。
  - 直線は無限遠点を通る円とみなす。
- 向きを込めて角度を変えない。

複比

- 4つの異なる複素数(or∞)の複比を次のように定義する。

$$D(z_0,z_1,z_2,z_3)=\frac{(z_0-z_2)(z_1-z_3)}{(z_0-z_3)(z_1-z_2)}$$

- 複比は一次分数変換で不変。

$$D(Tz_0,Tz_1,Tz_2,Tz_3)=D(z_0,z_1,z_2,z_3)$$

- 4点が1つの円周上に順に並んでいる⇔$D>1$

一次分数変換と複比

- 一次分数変換は3点の行き先により定まる。
- 逆に、任意の3点を任意の3点に写す一次分数変換が存在する。
- z_1, z_2, z_3をw_1, w_2, w_3に写す一次分数変換は

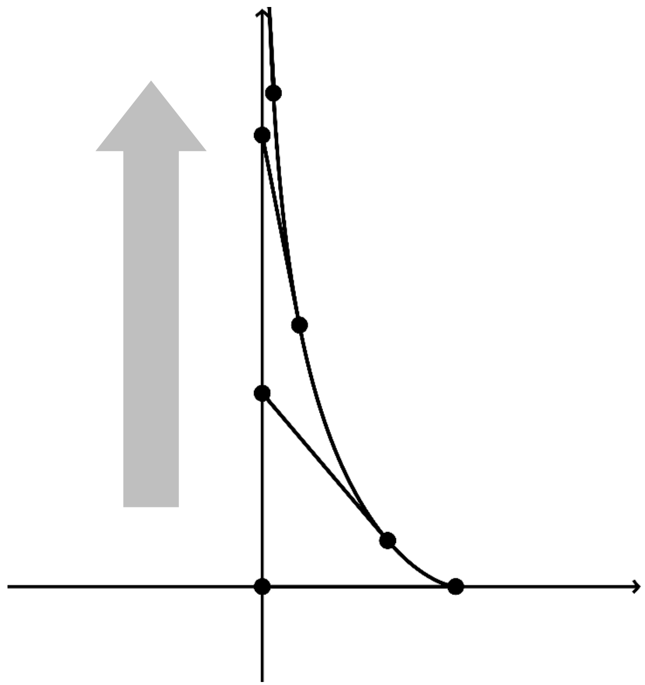
$$D(Tz, w_1, w_2, w_3) = D(z, z_1, z_2, z_3)$$

により定まる。

§1 双曲空間のモデル

牽引線(tractrix)

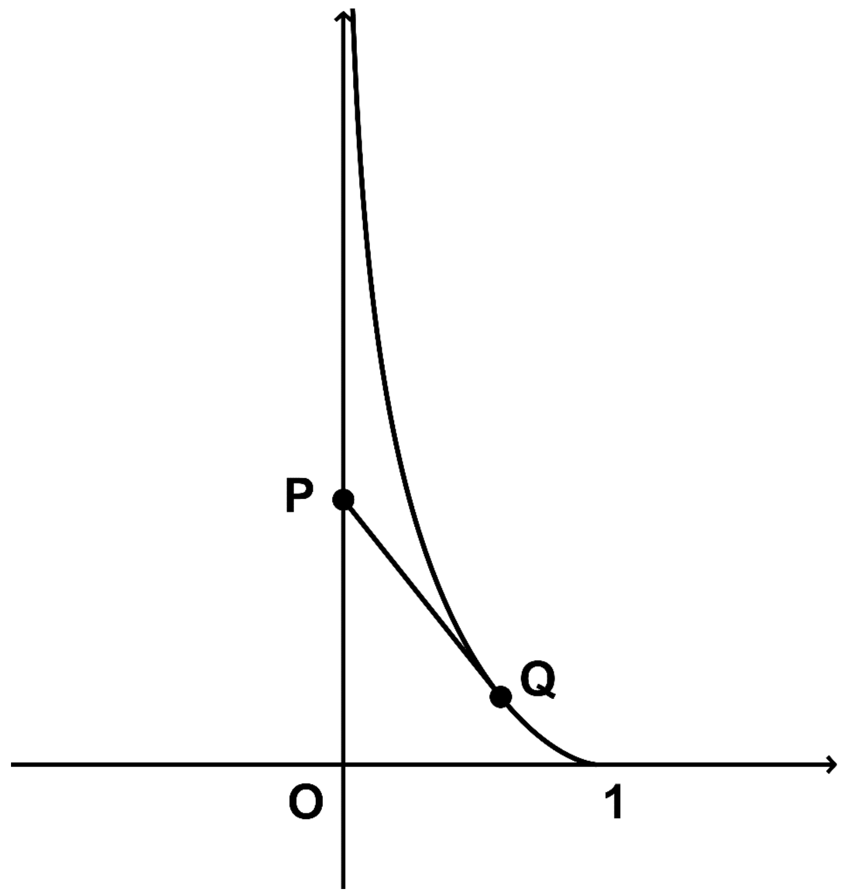
- 棒の端を持ってずるずると引きずったときに、棒のもう一方の端が描く軌跡。



牽引線の方程式

- 引っ張る棒が牽引線の接線になる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\cosh t} \\ t - \tanh t \end{bmatrix}$$

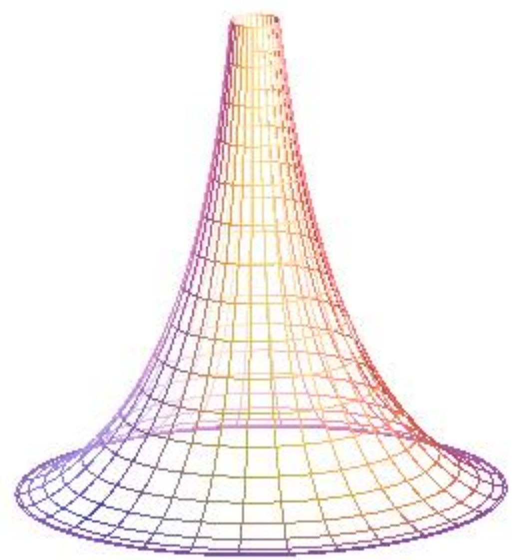


擬球1

- 牽引線を回転させてできる面。
- Gauss曲率が-1。

…第4回つどいご参照。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\theta}{\cosh t} \\ \dfrac{\sin\theta}{\cosh t} \\ t - \tanh t \end{bmatrix}$$



擬球2

- Beltramiが構成したと言われることが多いがMindingやCodazzi、Liouvilleなどがすでに計算していた。
- Beltramiは「擬球」という言葉を双曲平面の意味で使用していた。

E.Beltrami
(1835~1900)

擬球の第一基本形式

- 素直に計算すると以下の形になる。

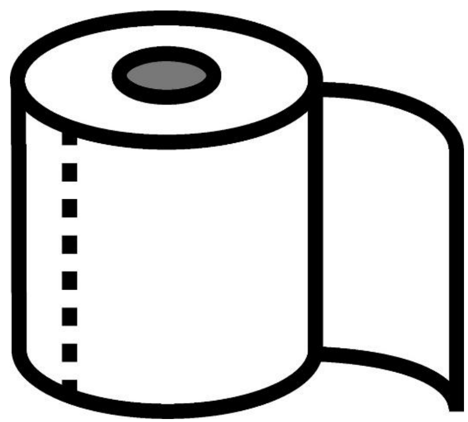
$$ds^2 = \frac{d\theta^2}{\cosh^2 t} + \tanh^2 t\, dt^2$$

- 変数変換$u = \cosh t$により次のようになる。

$$ds^2 = \frac{d\theta^2 + du^2}{u^2}$$

擬球の不満な点1

- 円柱状になっている。
  - 普遍被覆をとることにより解決。
  - θの定義域を実数全体に拡張する。
  - 薄さ0、曲率-1、長さ∞のトイレットペーパー。



擬球の不満な点2

- 完備でない。(x-y平面のとこで切れてる)
  - uの定義域を正の実数全体に拡張して対応。
  - uが0に近づくと長さが無限大になるので完備。

※完備な負の定曲率曲面は3次元Euclid空間に埋め込むことはできない(Hilbert)。

D.Hilbert
(1862~1943)

Poincare上半平面

- $\boldsymbol{H} = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 | y > 0\}$に第一基本形式

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

を入れたものをPoincare上半平面という。

- 複素平面で考えると

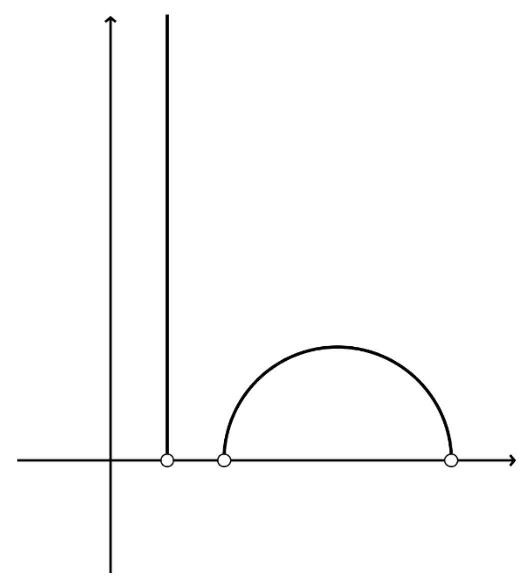
$$ds = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$$

と書ける。

Poincare上半平面の測地線

- 第一基本形式で決まる長さについて局所的に最短経路を与える曲線を測地線という。
  - 以後、双曲直線とも呼ぶ。
- Poincare上半平面の双曲直線は、実軸に直交する半直線または半円。

…第5回つどい参照。



Poincare上半平面の等長変換

- $SL_2(\boldsymbol{R})$は$\boldsymbol{H}$に一次分数変換として作用する。
  - ±1倍は同じ変換を定めるので次のようにおく。

$$PSL_2(\boldsymbol{R}) = SL_2(\boldsymbol{R})/\{\pm I\}$$

- この作用は向きと長さを保つ。
  - 通常の平面の回転と平行移動に相当。

※実は上半平面の向きと長さを保つ変換全体。

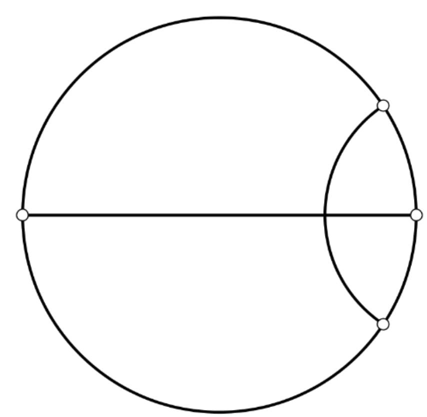
※実は上半平面の解析的自己同型全体。

Poincare円板

- 上半平面と単位円板はCayley変換により同型。

$$w=\frac{z-i}{z+i}\quad(z\in D^2)$$

- この同型によりPoincare上半平面の長さを単位円板に写したものをPoincare円板という。
  - Poincare円板の双曲直線は円周に直交する円弧。



Poincareモデル

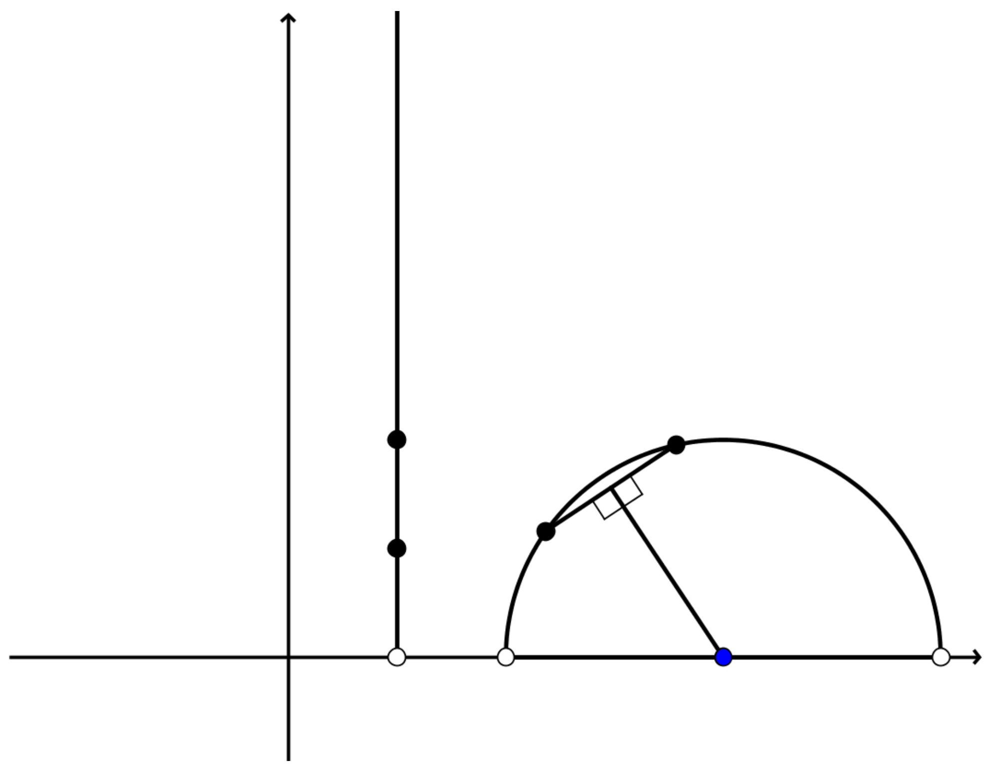
- Poincare上半平面、Poincare円板ともにBeltramiが先に発表しているが、これらの等長変換がFuchs関数の対称性と一致することにPoincareが気付いたため、Poincareの名が冠されているらしい。
  - 「馬車のステップに足をかけた瞬間に」閃いた。

J.H.Poincaré
(1854~1912)

Euclidの第1公準に関して

Ⅰ.任意の点から他の一点に直線が引ける。

- 上半平面で考えれば明らか。



Euclidの第2公準に関して

Ⅱ.任意の直線を連続的にまっすぐ延長できる。

- 上半平面の虚軸の長さを計算してみる。
  - ✓等長変換群は双曲直線に推移的に作用している。
- 実軸までの長さは無限大。
- 線分の長さの公式が複比で書ける。
  - ✓Cayley変換は一次分数変換なので複比を保存し、Poincare円板の第一基本形式が求められる。

Euclidの第3公準に関して

Ⅲ. 任意の中心と半径に関して円が描ける。

- Poincare円板の回転も等長変換なので、双曲円は通常の意味でも円になっている。
  - ✓Cayley変換も一次分数変換なので、実はPoincare上半平面の双曲円も通常の円になる。
  - ✓ただし通常の円の中心と双曲円の中心は異なる。
- 半径rの双曲円の周長は$2\pi\sinh r$。
  - ✓面積をぜひ計算してください。

Euclidの第4公準に関して

Ⅳ.すべての直角は互いに等しい。

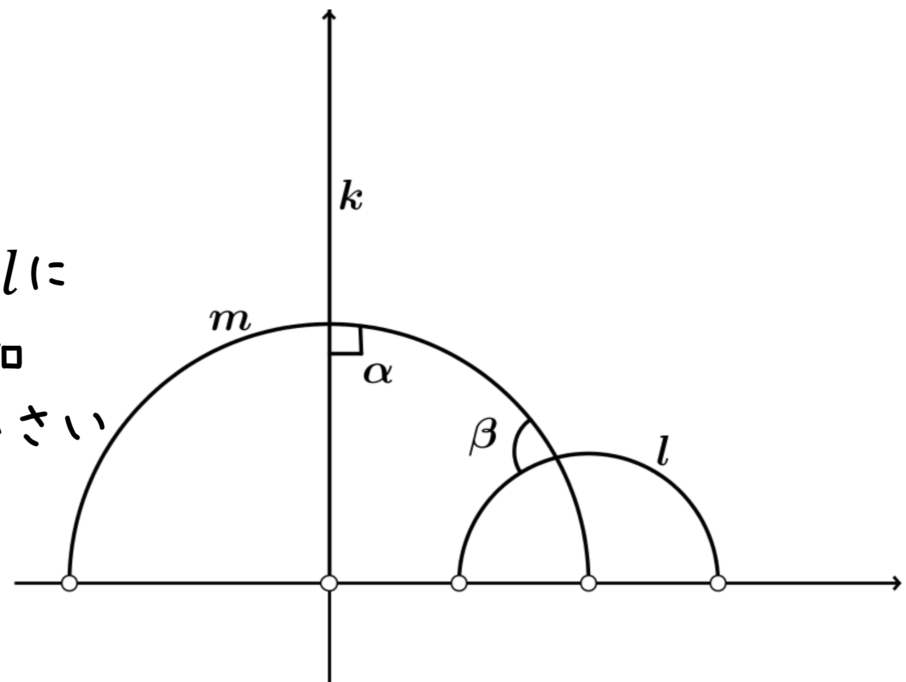
- 第一基本形式の形より、Poincare上半平面とPoincare円板のいずれも、双曲的な角と通常の角は等しい。
  - 角度は、余弦定理より長さを使って定義できる。

Euclidの第5公準に関して

Ⅴ.直線が二直線と交わるとき、同じ側の内角の和が二直角より小ならば、その二直線が限りなく延長されたとき、内角の和が二直角より小なる側で交わる。

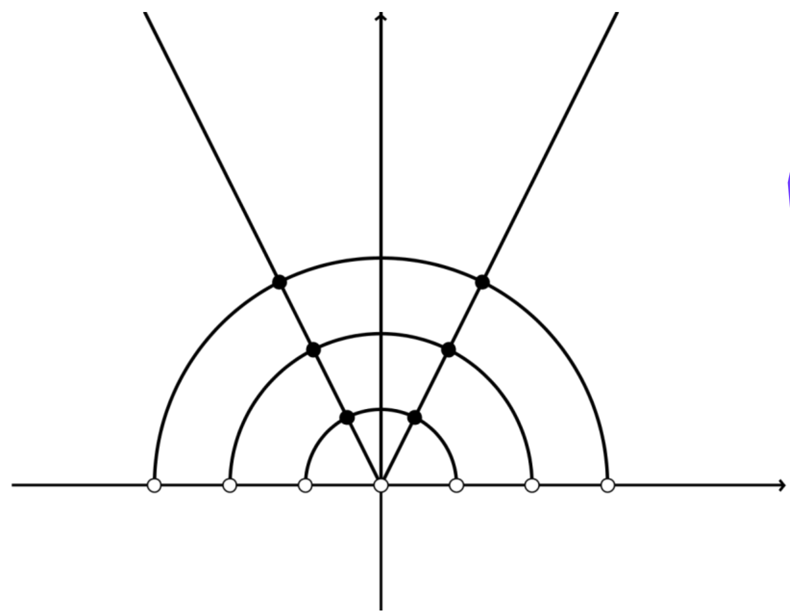
- 不成立。

直線mが二直線kとlに交わっていて内角の和$\alpha+\beta$は180度より小さいがkとlは交わらない。



等距離線

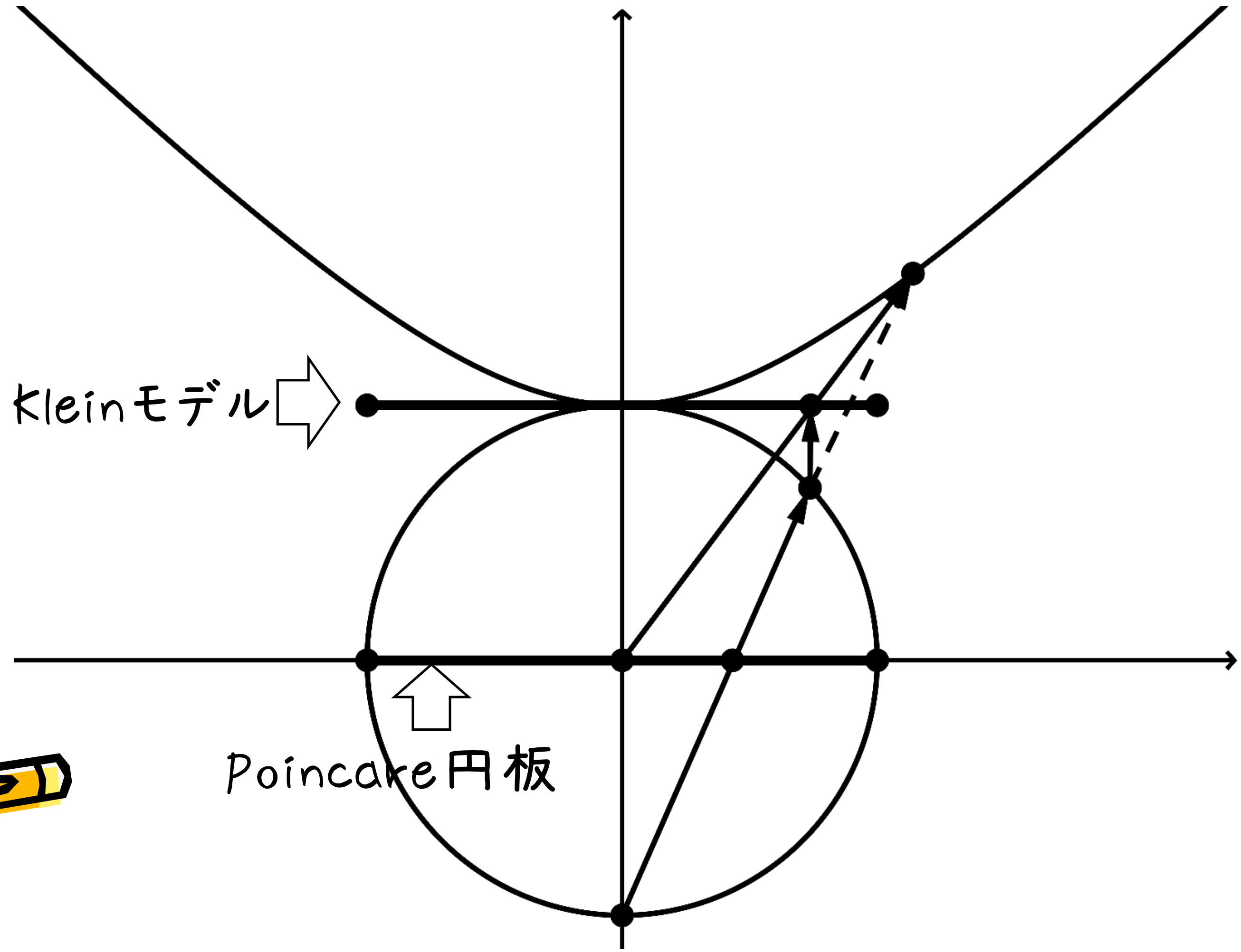
- Euclid幾何学では、ある直線に平行な直線はその直線から等距離にある点の成す直線。
  - 双曲幾何学では等距離線は双曲直線ではない！
  - 上半平面の虚軸の等距離線は次の図の通り。
    - ✓拡大は等長変換。



その他のモデル

- Poincare円板を単位球の赤道面とし、南極から北半球に射影して上半球モデルを得る。
- 上半球モデルを北極で単位球に接する単位円板に射影してKleinモデルを得る。
- Kleinモデルを原点から双曲面に射影して双曲面モデルを得る。

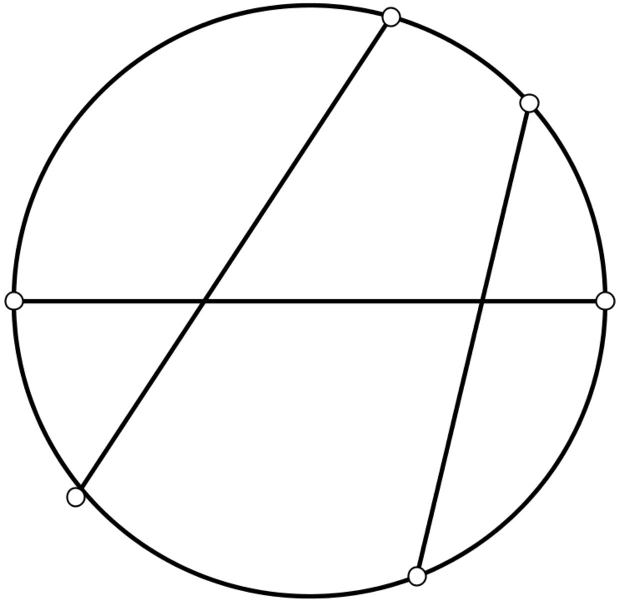
模式図



Kleinモデル

- 単位円板の弦が双曲直線を表す。
- Beltramiが先に発表していたが、後にKleinが射影幾何学に用いたのでKleinの名が冠されているらしい。

F.C.Klein
(1849~1925)



§2 双曲平面の三角法

Minkowski空間

- $\boldsymbol{R}^3$に擬内積と擬外積を以下で定義する。

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$ に対し

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3$
- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ -(a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{bmatrix}$

擬内積と擬外積の公式

- 以下の公式が成り立つ。
  - $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$
  - $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$
  - $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d})$
  - $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \det(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = -\det(\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j)$

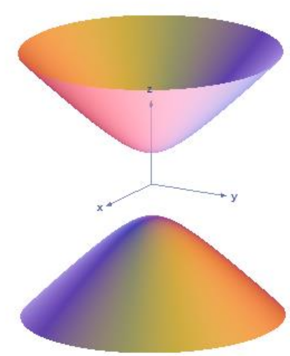
双曲面モデル

● Minkowski空間の二葉双曲面 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=-1$ のうち、$z>0$ の葉$\boldsymbol{H}$が双曲面モデルとなる。

- 点$\boldsymbol{x}_0$での接平面の方程式は

$$\boldsymbol{x}_0\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0$$

  - ✓接ベクトル$\boldsymbol{v}$は$\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{v}=0$を満たす。
- 擬内積は接平面上では正定値。
  - ✓接平面は「傾き」が1より小さい。
- 測地線は原点を通る平面との交線。



二点間の距離

- $t = 0$で位置$\boldsymbol{x}$、速度$\boldsymbol{v}(|\boldsymbol{v}| = 1)$の測地線は
$$\boldsymbol{l}(t) = (\cosh t)\,\boldsymbol{x} + (\sinh t)\,\boldsymbol{v}$$
と書ける。
  - 平面$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle$と$\boldsymbol{H}$の交線。
- 2点$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}$の距離$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$に対して次が成り立つ。
$$\cosh d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$$

測地線の法線ベクトル

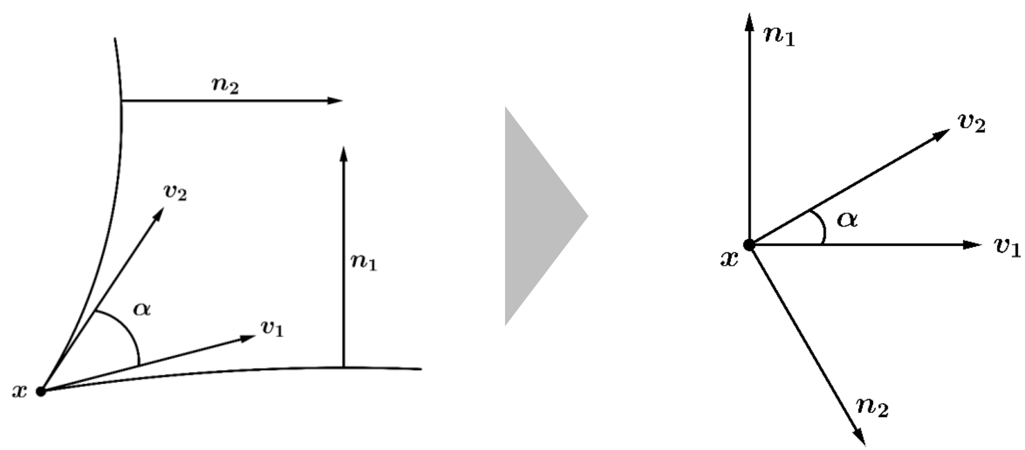
- 測地線$\boldsymbol{l}(t)$の法線ベクトルを次で定める。

$$\boldsymbol{n}(t) = \boldsymbol{l}(t) \times \dot{\boldsymbol{l}}(t)$$

  - $\boldsymbol{n}$は$\boldsymbol{l}$と$\dot{\boldsymbol{l}}$に擬直交している。
  - 上から見たとき$\boldsymbol{n}(t)$は$\boldsymbol{l}(t)$に対して左向き。
- Minkowski空間では、$\boldsymbol{n}$はtによらず一定！
  - $\langle \boldsymbol{n} \rangle$は平面$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle$の擬直交補空間。

測地線が角を成す場合の公式

- 図の状況で以下の等式が成り立つ。
  - $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = \cos\alpha\,,\qquad \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = -(\sin\alpha)\ \boldsymbol{x}$
  - $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = -\cos\alpha\,,\quad \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (\sin\alpha)\,\boldsymbol{x}$
  - $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = \sin\alpha$
  - $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (\cos\alpha)\boldsymbol{x}$

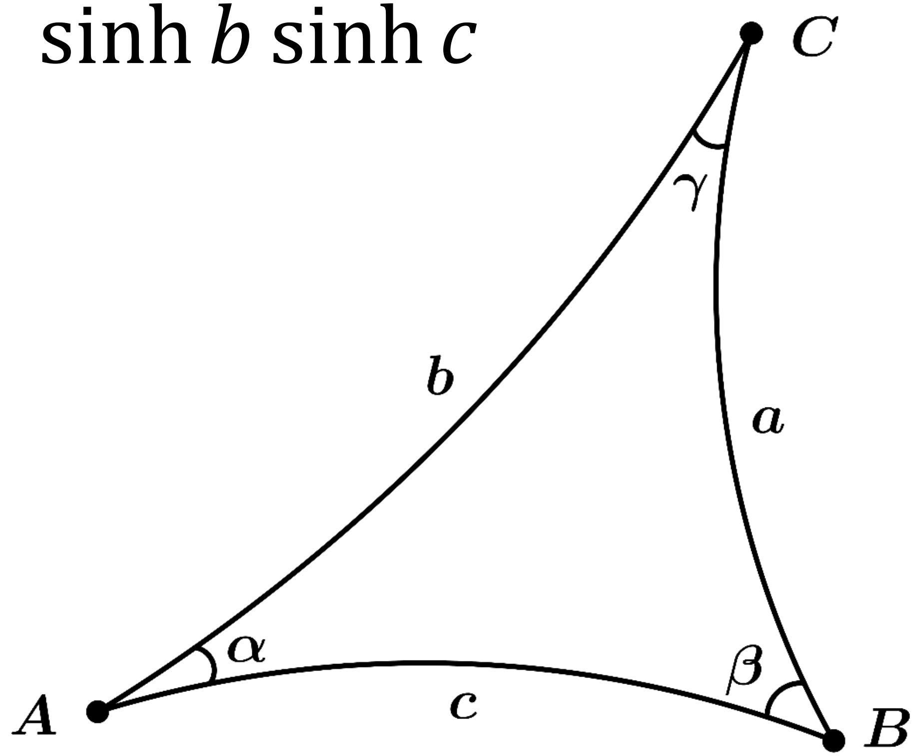


※以下、図はPoincare円板のもの。

双曲三角形の余弦定理

- 双曲三角形について以下の式が成り立つ。

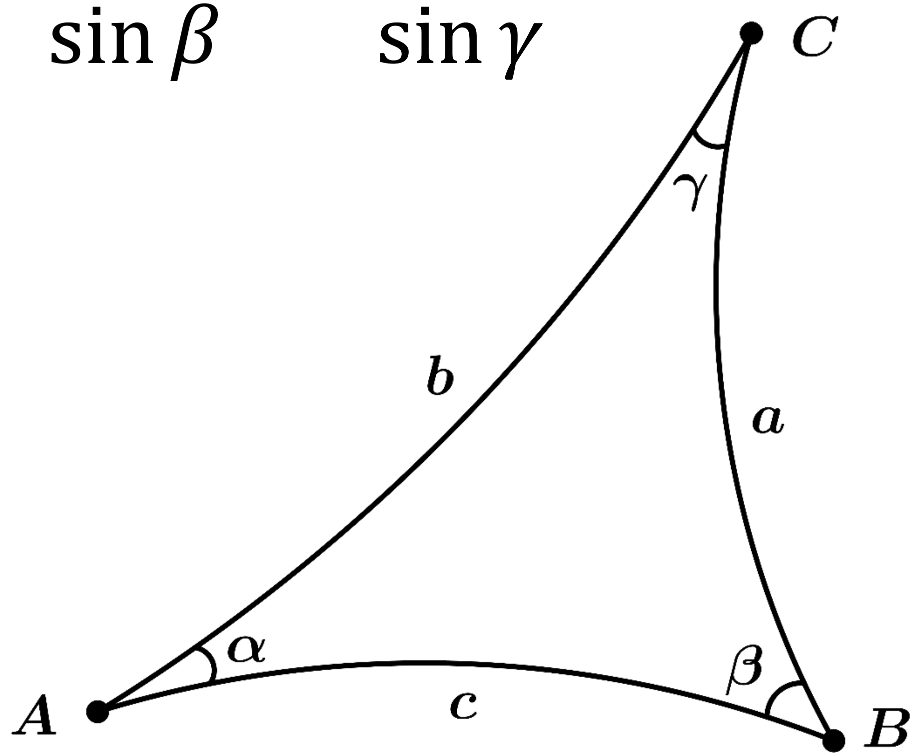
$$\cos\alpha = \frac{\cosh b\cosh c - \cosh a}{\sinh b\sinh c}$$



双曲三角形の正弦定理

- 双曲三角形について以下の式が成り立つ。

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$



双曲三角形の??定理

- 双曲三角形について以下の式が成り立つ。

$$\cosh a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

- 角度から辺の長さが決まる。

直角三角形の場合

- Pythagorasの定理

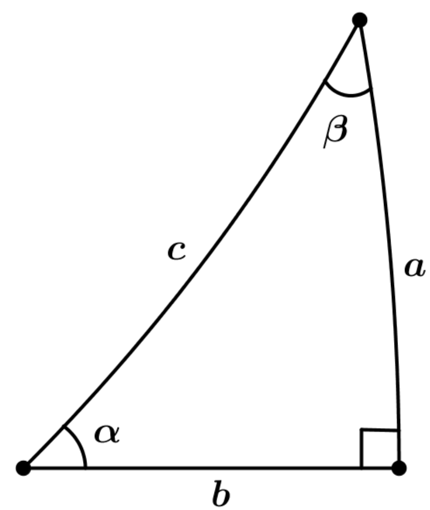
$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

- 三角比

$$\cos\alpha = \frac{\sinh b}{\sinh c}\cosh a, \quad \sin\alpha = \frac{\sinh a}{\sinh c}$$

- 新しい式

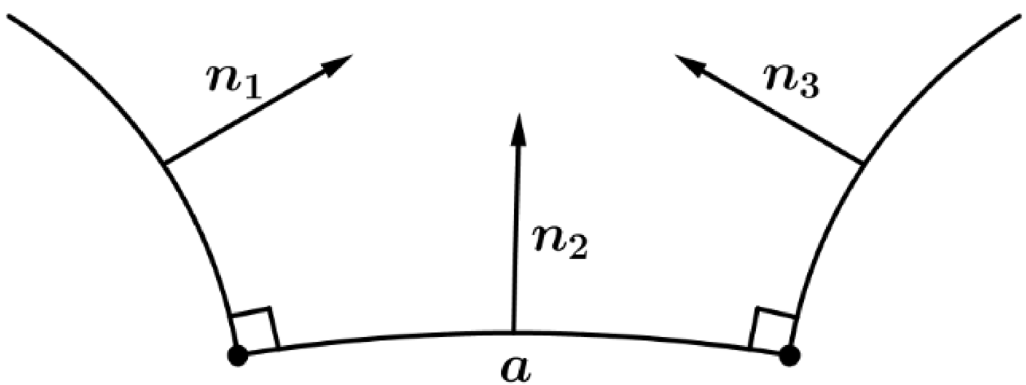
$$\cosh a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$



直角が2つある場合の公式

- 図の状況で次の公式が成り立つ。

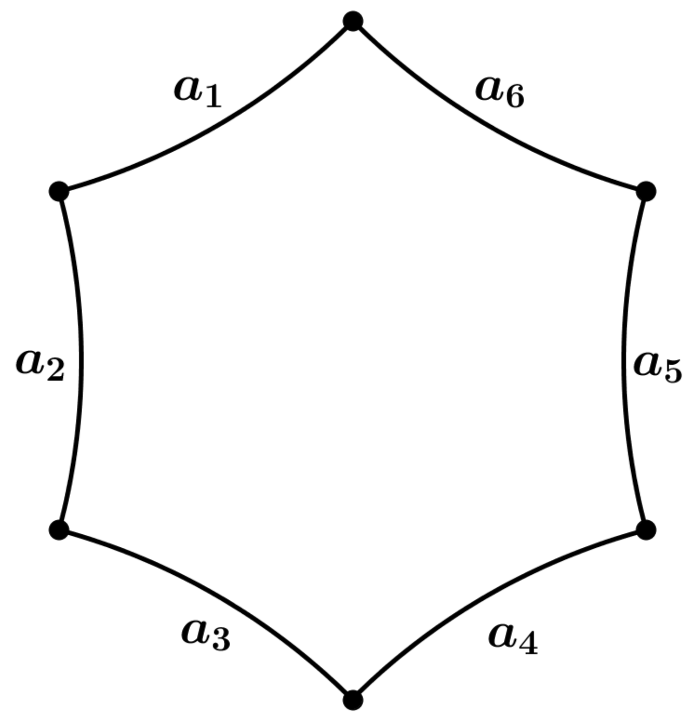
$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_3 = -\cosh a$$
$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_3 = (\sinh a)\,\boldsymbol{n}_2$$
$$\det(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3) = -\sinh a$$



直角六角形の余弦公式

●直角六角形に対し次の公式が成り立つ。

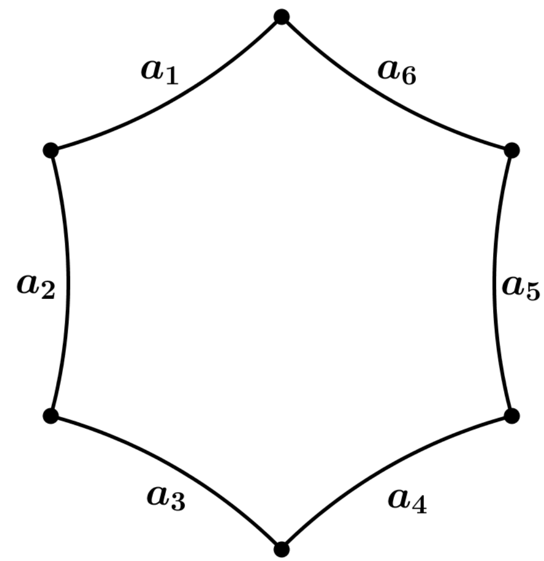
$$\sinh a_2 \sinh a_4 \cosh a_3 = \cosh a_6 + \cosh a_2 \cosh a_4$$



直角六角形の正弦公式

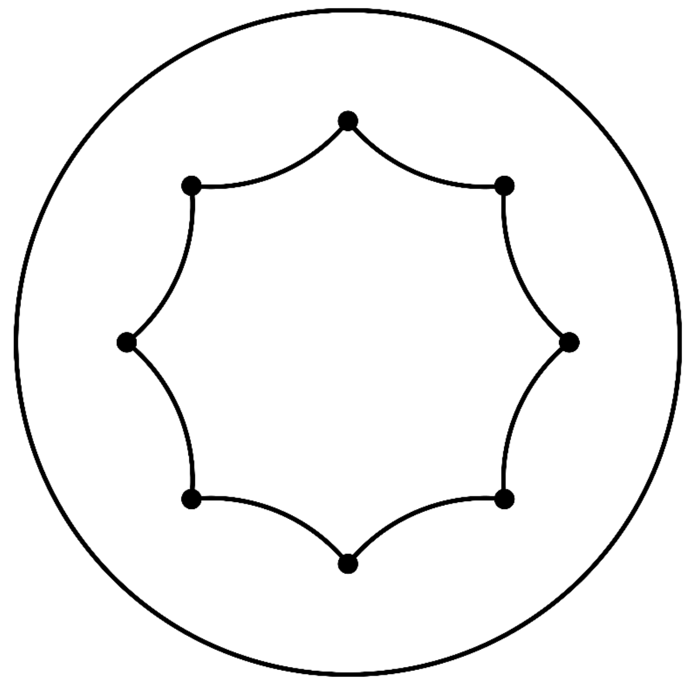
● 直角六角形に対し次の公式が成り立つ。

$$\frac{\sinh a_4}{\sinh a_1} = \frac{\sinh a_2}{\sinh a_5} = \frac{\sinh a_6}{\sinh a_3}$$



正n角形

- $n \geq 3$に対し、$0 < \alpha < \left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$を満たす任意の$\alpha$に対し、全ての内角が$\alpha$となる正$n$角形が存在する。



§3 双曲三角形の面積

状況説明

Bolyai(子)「平行線公理なくてもいけるかも」

Bolyai(父)「やめとけ、俺はそれで人生棒に振った」

Bolyai(子)「いや、どうやら俺無から世界創造したわwww」

Bolyai(父)「ﾏｼﾞﾃﾞｶwなら早く発表しろ」

Gaussに手紙書かないと…φ(..)ｶｷｶｷ

「息子が大発見しました」

Gauss　　「それ俺が考えてたのと完全に一緒w」

Bolyai(子)「え」←いまここ

Gaussが手紙で述べたこと

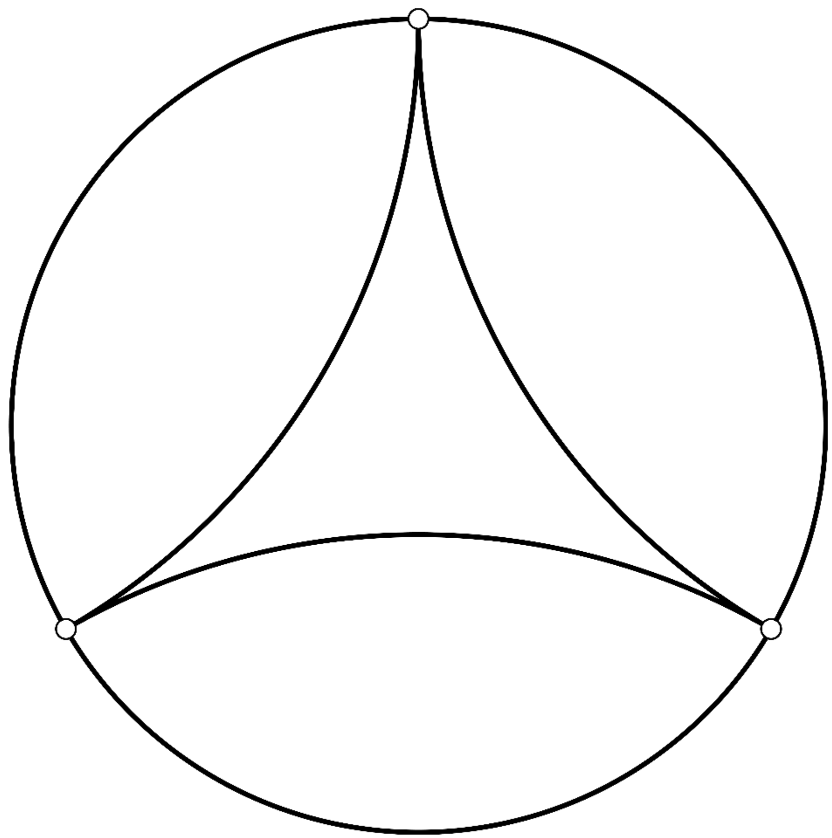
- 内角がA, B, Cの双曲三角形の面積は角不足
$$\pi - (A + B + C)$$
の定数倍となる。

…三角形の面積は角度のみで決まる!!

- 以下の証明の流れはGaussによるものですが、説明の前半は全然違います。

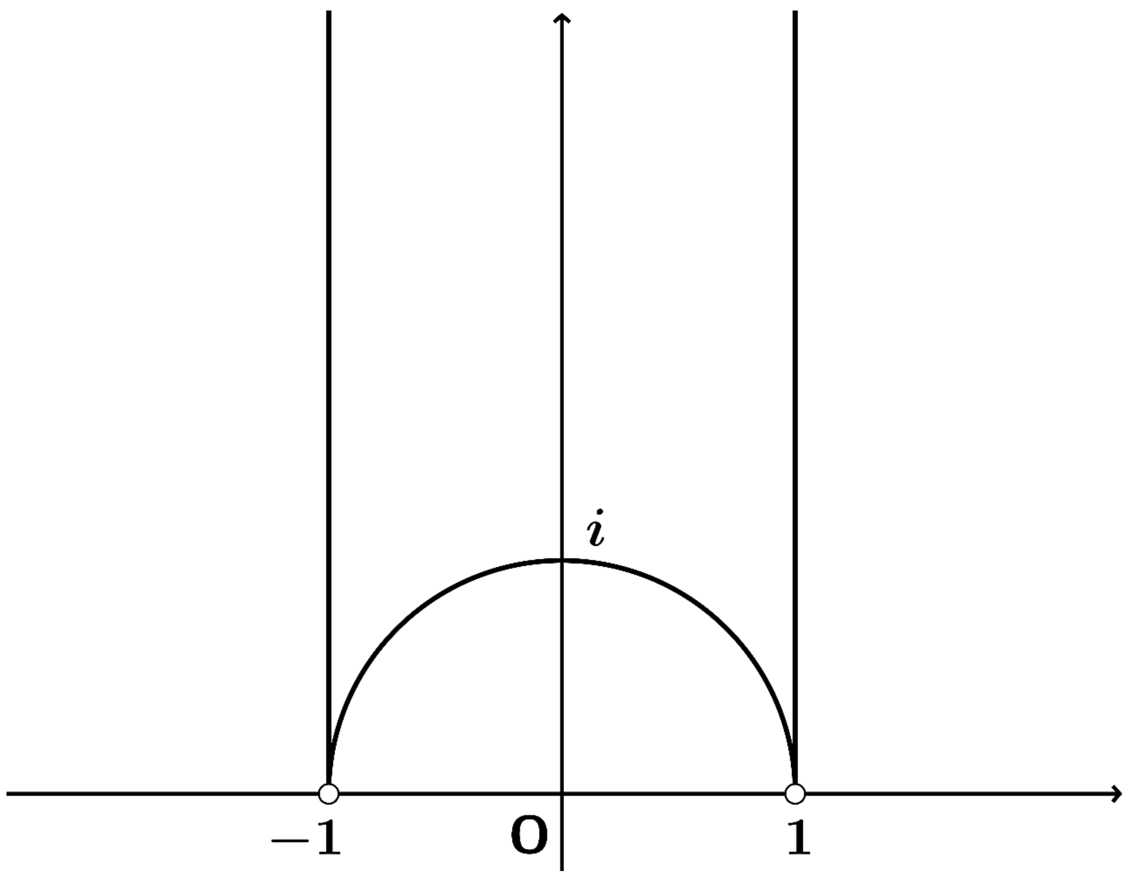
Gaussの証明

I.全ての三重漸近三角形は合同である。



Gaussの証明

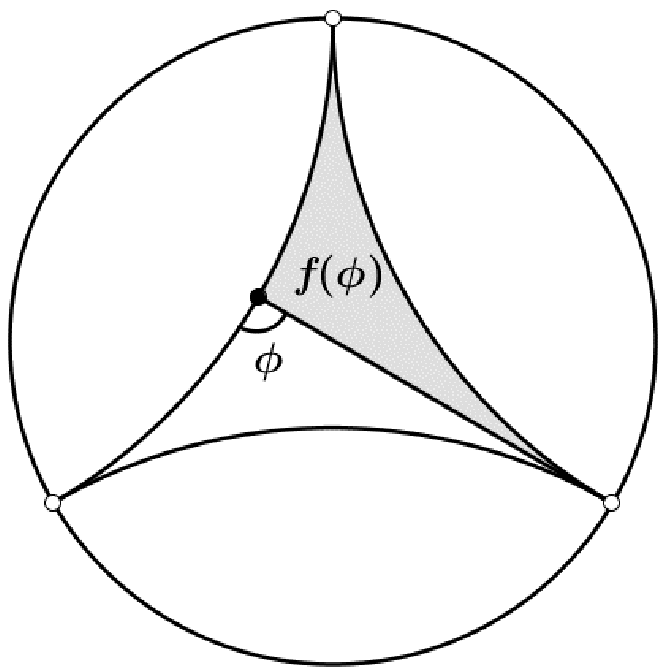
Ⅱ. 三重漸近三角形は有限の面積tを持つ。



Gaussの証明

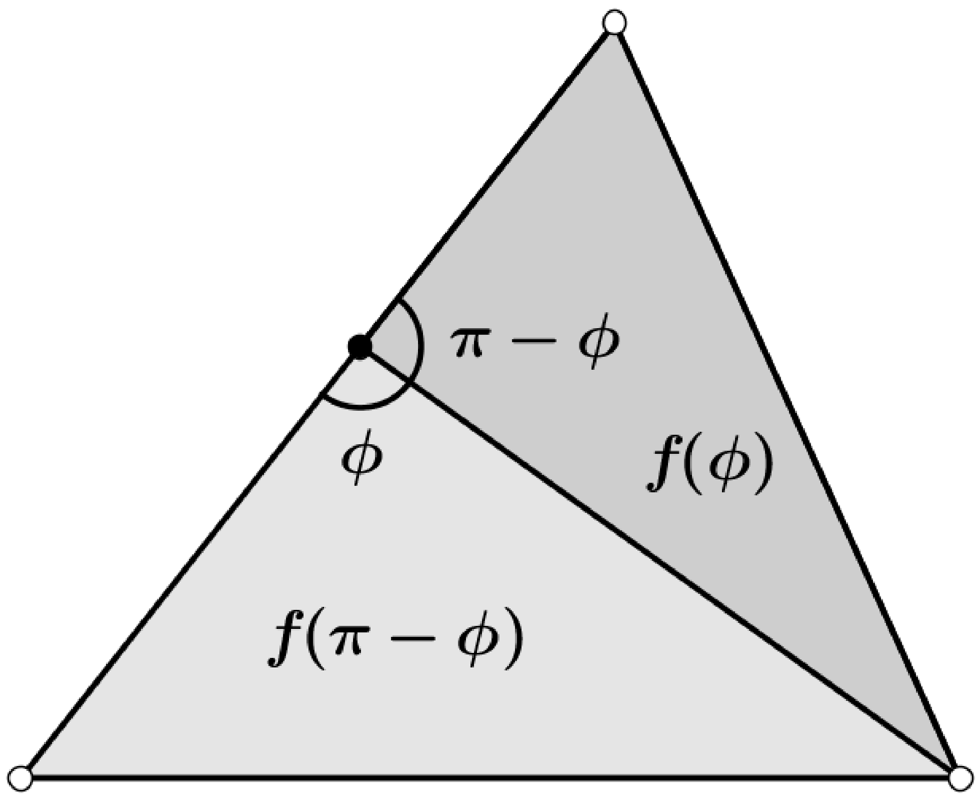
Ⅲ. 二重漸近三角形の面積は0でない内角により決まる。

- 対応する外角がϕのとき面積を$f(\phi)$で表す。



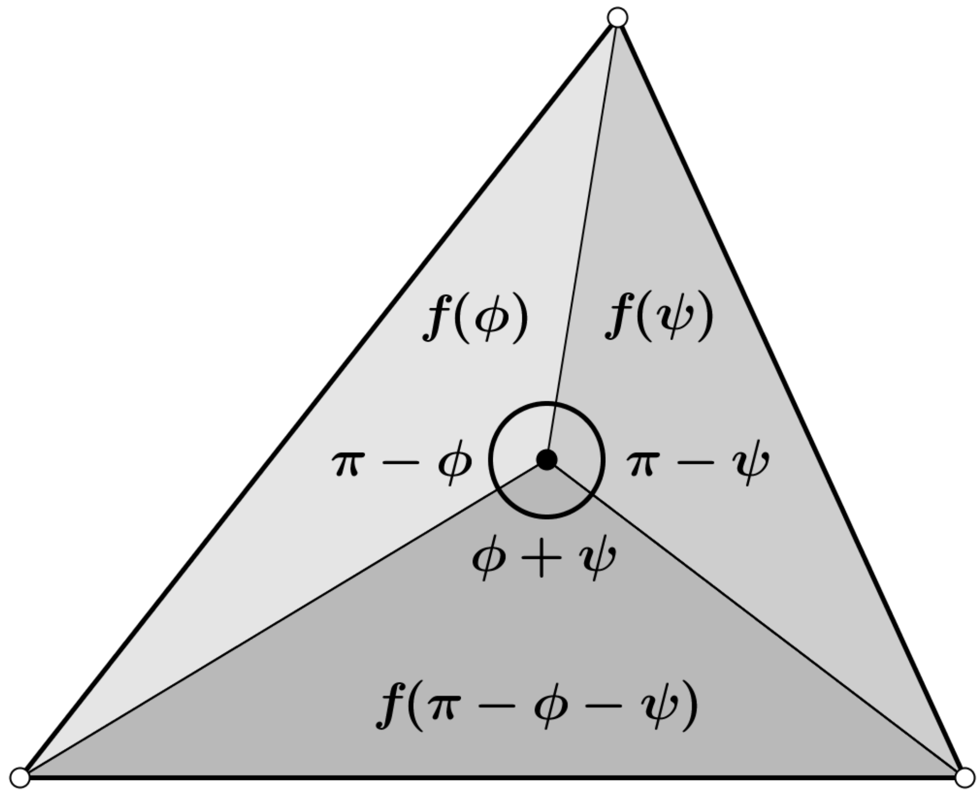
Gaussの証明

Ⅳ.$f(\phi)+f(\pi-\phi)=t$



Gaussの証明

$$\nabla.\, f(\phi) + f(\psi) + f(\pi - \phi - \psi) = t$$



Gaussの証明

Ⅵ. $f(\phi)+f(\psi)=f(\phi+\psi)$

- したがってある定数μに対し

$$f(\phi)=\mu\phi$$

と書ける。

- 適当な単位をとれば$\mu=1$とできる。

（双曲平面はそうなっている。）

Gaussの証明

VII. 三角形の面積Δは角不足の定数倍となる。

$$\Delta = \mu(\pi - A - B - C)$$