

水素原子の安定性

ゆきみ @migonivium

2015年1月9日

水素原子は e の電荷を持つ原子核 (陽子) のまわりをひとつの $-e$ の電荷をもつ電子がまわっているとしよう. 陽子から電子には $e^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ のクーロン力がはたらく. つまり, 古典力学的に

$$|\mathbf{F}| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ということ. ここで r はふたつのあいだの距離. 角速度を ω とすると, 運動方程式から

$$m|a| = mr\omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

となっている. $v = r\omega$ であるから, 電子のエネルギー E は

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

となる. 電磁気学ではこの電子はエネルギーを失っていくはずで, $E \rightarrow -\infty$ のとき $r \rightarrow 0$ と電子が原子核におちこむ. これは 10^{-11} 秒程度のオーダーであることが計算できる (たいへん). つまり, 水素原子は安定ではない. これは経験事実に反している.

そこで量子力学を適用させて, 水素原子の安定性をたしかめたい. ミクロな世界で運動のエネルギーを記述するのは Schrödinger 方程式になる:

$$-\Delta\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (x \in \mathbb{R}^3).$$

ここで ψ は粒子の状態を表す波動関数で, V はポテンシャル. 量子力学での安定性は意味がむずかしいが, もしエネルギーをどこまでも失ってしまえば, 系はある状態にとどまったりはせず, 安定ではないといえる. そこで, 量子力学においてはエネルギー E について $\inf E > -\infty$ のときに系は安定であるという. これは量子力学的系の安定性のひとつの指標と解釈される. E の有限性や最小の値を示すにはさまざまな解析学の不等式を使うことになり, 数学の物理学への応用の一端を紹介できればと思います.