双曲平面の色々なモデルと初等幾何で遊ぶ

ring

「双曲平面」という普通の平面とはちょっと違った形をした平面上での幾何学について話します。双曲平面というのはいわゆる「非 Euclid 幾何学」の舞台となるものです。つまり Euclid 幾何学の第 5 公準「1 つの線分が 2 つの直線に交わり、同じ側の内角の和が 2 直角より小さいならば、この 2 つの直線は限りなく延長されると、2 直角より小さい角のある側において交わる。」が成り立たないような平面です。この講演では、

1. 双曲平面上の三角法
2. 双曲平面上の三角形の面積と角度の関係

の 2 つの話題を紹介しようと思います。

1. について、双曲平面上での三角法においては、三角関数に加えて双曲三角関数が登場します。また、高校で習う三角形の正弦定理や余弦定理の対応物に加えて新たな関係式が登場したり、「直角六角形の正弦（余弦）定理」などがあったりします。これらの公式から、例えば「三角形の 3 辺の長さは 3 つの内角によって一意に定まる。」や、「任意の 3 つの正の数に対し、それらが 1 つおきの 3 辺の長さとなるような直角六角形が一意に存在する。」という、Euclid 幾何学ではありえないような定理が示せます。

2. について、双曲平面上の三角形の面積は内角の和だけで決まってしまいます。これも Euclid 空間ではありえない主張です。Gauss-Bonnet の定理というものの特殊な場合であり、ベクトル解析の Stokes の定理を使って示すのが一般的かと思いますが、今回は Gauss が Bolyai の父親に送った手紙（後述）に記されている証明に沿って（詳細は全然違いますが）説明したいと思います。幾何学的にとてもおもしろい証明です。

以下は推測ですが、非 Euclid 幾何学を発見したと言われる Lobachevski と Bolyai は、公理的に非 Euclid 幾何学を研究して、非 Euclid 幾何学の無矛盾性は示していないと思います。これについては後年 Beltrami などが Euclid 幾何学の中に非 Euclid 幾何学の「モデル」を構築したことによって「Euclid 幾何学が無矛盾ならば非 Euclid 幾何学も無矛盾である」ことが示されました。この講演では、公理的な議論はせずに随時便利なモデルをとって議論します。また、非 Euclid 幾何学のモデルはいくつもあるのでそれらの関係についても説明するつもりです。逆に、双曲空間の中に Euclid 幾何学のモデルを作るという面白い話もできればいいのですが…

歴史的な話も随所に入れていきたいと思っています。例えば Bolyai の非 Euclid 幾何学の発見近辺にはなかなか名言が多くて面白いです。例を挙げると、「今私が言えることは、私は無から世界を創造したということだけです。」（自分の成果を父親に知らせる Bolyai の手紙）、「ある種のことがらは、早春に菫の花が咲き誇るように、同時に色々な場所で機が熟すから。」（息子に早く成果を発表するように促す Boyai の父親の手紙）、「それ（Bolyai の仕事）を称賛することは私自身を称賛することになる。」（Bolyai の父親が息子の成果を Gauss に知らせた手紙に対する Gauss の返事）などなど。

高校三年生〜大学一回生向けの講演とする予定です。仮定する予備知識は基本的な微分積分と線形代数、複素平面です。具体的な計算を中心にする予定です。