

はじめての量子論

ひやまひょう (@hyamaHyo)

この講演では「はじめての量子論」というタイトルで量子論の初学者向けに、量子論の公理と量子複製不可能定理についてお話しします。量子複製不可能定理は古典論にはない量子論の性質の一つで、物理においては基礎的にも応用的にも重要なものです。また、時間が許せば一般確率論が量子論の観点から量子複製不可能定理について話したいと思います。関数解析について知っていると言いきりかたかもしれませんが、一応前提知識は仮定してないつもりで話そうと思っています。(多くのことは無限次元ヒルベルト空間でも成り立ちますが、講演では有限次元ヒルベルト空間のレベルで話します)。

I. 量子物理って？

量子物理はミクロな物理系の現象を記述する理論である。ミクロな世界が集積して(あるいはミクロな世界の極限として)、マクロな世界が表現されると信じるのであれば、量子論の公理は物理学の基本原則と言っても言い過ぎではない[あくまで個人的な感想]。

量子論の基本的枠組みは1932年にJohn von Neumannがまとめている[1]。これは現代でもほとんど修正されていなく、完成度の高いものであるといえる。一方、量子論の公理をまとめたvon Neumann自身がこの公理を完全なものであると考えてはいない[2]。この公理から導きだされた結果が、実験事実と今のところあっているということであり、それは物理としては十分なこともかもしれない。しかし、この公理自体が奇妙なことを認めることから始まるのである。それは、まるで呪文のようである。

II. 量子論の呪文

量子物理を勉強しようとして、量子物理の本を手に取り、決まって次のような呪文が詠唱することになるだろう。

量子系にはある可分なヒルベルト空間が付随し、状態は単位ベクトル、物理量はそのヒルベルト空間上の自己共役作用素で表される。時間発展はSchrödinger方程式に従い、混合系は系のヒルベルト空間のテンソル積で表現される。

これに測定に関するものを加えたものが量子論の公理である。この呪文を用いたとしても、面白い話はいろいろあるし、この呪文を別の原理からスタートしようとする話もある。最初にこの量子論の公理について解説する。

III. 量子複製不可能定理 [3][4]

古典の世界では状態を複製することができる。だから、僕たちは教科書やノートをコピーして勉強することが出来る(いうまでもないが著作権の範囲内)。しかし、量子論ではコピーすることは出来ないという禁止定理が存在する。これが量子複製不可能定理である。

この定理をちゃんと述べよう。まず、あるヒルベルト空間を \mathcal{H} とかく。状態 $|a\rangle \in \mathcal{H}$ が複製出来るとは、

$$U|a\rangle \otimes |s\rangle = |a\rangle \otimes |a\rangle$$

なる補助系の状態 $|s\rangle \in \mathcal{H}$ とユニタリ変換 U の組が存在することである。

そして、量子複製不可能定理は次のような定理である。

定理：量子複製不可能定理

異なる状態 $|a\rangle$ と $|b\rangle$ が同じ補助系の状態とユニタリ変換の組を用いて複製出来るならば、それらは直交する。

ユニタリ変換は状態変化を表している。したがって、任意の状態を複製するような状態変化は許されないと解釈出来る。(たまたま二つの状態が直交していたらその二状態を複製することは出来るがそれは特殊な場合でしかない)

この定理はもう少し一般化できるが、本質をあらわすにはこれで十分である。

量子論の世界には他にもいろいろ話があるが、今回は量子論の公理と、その例として量子複製不可能定理について話す。

[1] J. V. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Julius Springer, 1932) p. 262, [邦訳：井上健他訳, 量子力学の数学的基礎, みすず書房, 1957].

[2] G. Birkhoff and J. Von Neumann, *Annals of Mathematics*, 823

(1936).

[3] W. K. Wootters and W. H. Zurek, *Nature* **299**, 802 (1982).

[4] D. Dieks, *Physics Letters A* **92**, 271 (1982).