複数点の幾何のはなし

ペンパ石 (@PPSPSSSPPP)

平面の上にある一般的な 10 点を取る、と言ったときに、どのような点を取ればいいでしょうか。まず同じ点を取ってはいけません。次に思い付く条件は、どの 3 点も同一直線上にないことでしょう。より非自明な条件として、どの 4 点も同一円周上にないことが挙げられます。他の条件はあるでしょうか。平面ではなく 3 次元空間では？　4 次元、100 次元空間ではどうでしょうか？

私の講演の一つの目標は、この問題へ、自分の立場からの一つの解答を与えることです。ただし問題を単純化するため、普通のユークリッド空間ではなく「複素数体上の」「射影空間」で問題を考えます。この二つの仮定はいずれも場合分けを減らす効果があります。前者は複素数で考えると二次方程式で「解無し」というケースがなくなることを思い出せば想像がつくかなと思いますが、後者については馴染みない人もいるかと思うので、この講演に沿った形で復習するつもりです。

もう一つの目標が、この問題を通じて、代数幾何学と呼ばれる分野の一端に触れてもらうことです。上の問題の解答は「線型系」という概念に沿った形で説明されますが、この線型系を通じて少しだけ代数曲面論の話ができます。「3 次曲面の中には 27 本の直線が入っている」という話を聞いたことはないでしょうか？　これには射影平面上の 6 点の幾何が絡んでいるのですが、そういった事実の一端だけでも紹介しようと考えています。

また関連する話題として、4 次方程式の解き方の幾何的な理解があります。実は Bhargava 氏の「高次合成則」という理論の背景にも、この複数点の幾何が背景にあるので、余裕があればその関連についても喋るつもりです。

なるべく全参加者を想定して講演するつもりですが、射影空間は知っておいた方が楽しめるかも知れません。そのため推奨は三回生以上としています。

References

[1] Manjul Bhargava. Higher Composition Laws I $\sim$ IV.

[2] David Eisenbud. The geometry of syzygies: A second course in commutative algebra and algebraic geometry.

[3] Robin Hartshorne. Algebraic Geometry.

[4] 飯高 茂, 浪川 幸彦, 上野 健爾. デカルトの精神と代数幾何.