とにかく大きい数を考える

sappy

2014 年 9 月 14 日

初級編

グラハム数

- 指数タワー $a \uparrow\uparrow b$
- 指数タワーの変形
- さらに　すごい　演算

足し算・かけ算・ベキ乗

足し算を繰り返すとかけ算が生まれ、
かけ算を繰り返すとベキ乗が生まれた。

- $10 + 10 = 20$
- $10 \times 10 = 10 + 10 + \cdots + 10 = 100$
- $10^{10} = 10 \times 10 \times \cdots \times 10 = 100$ 億

繰り返すことにより、大きな数を作ることが出来る。

ベキ乗の次

定義 1

$$a \uparrow\uparrow b = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \qquad (b \text{ 個の } a)$$

とても簡単な例　$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

べキ乗の次

定義 1

$$a \uparrow\uparrow b = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \qquad (b\text{ 個の }a)$$

とても簡単な例　$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

計算の順番は右から

$$3 \uparrow\uparrow 3 \;=\; 3^{3^3} \;=\; 3^{27} \;\neq\; 27^3$$

ベキ乗の次

定義 1

$$a \uparrow\uparrow b = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \qquad (b \text{ 個の } a)$$

とても簡単な例　$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

計算の順番は右から

$$3 \uparrow\uparrow 3 \;=\; 3^{3^3} \;=\; 3^{27} \;\neq\; 27^3$$

例 1

$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 27,$

$3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7625597484987$　(7 兆 6 千億ほど),

$3 \uparrow\uparrow 4 = 3^{3^{3^3}} = 3^{7625597484987}$　(3 兆桁くらい)

ベキ乗の次

定義 1

$$a \uparrow\uparrow b = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \qquad (b\text{ 個の } a)$$

とても簡単な例　$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

計算の順番は右から

$$3 \uparrow\uparrow 3 \ = \ 3^{3^3} \ = \ 3^{27} \ \neq \ 27^3$$

例 1

$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 27,$

$3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7625597484987$　(7 兆 6 千億ほど),

$3 \uparrow\uparrow 4 = 3^{3^{3^3}} = 3^{7625597484987}$　(3 兆桁くらい)

宇宙にある素粒子の数 $\cdots$ $10^{80} \sim 10^{85} \ll 10^{3\text{ 兆}}$　$3 \uparrow\uparrow 4$

$3 \uparrow\uparrow n$ で遊んでみる

10 のベキを用いて変形してみる

高校の復習

$\log_{10} 3 \quad 0.4771,\ \ 3 = 10^{\log_{10} 3},\ \ (10^a)^b = 10^{a \times b},\ \ 10^a 10^b = 10^{a+b}$

$3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{27} \qquad (10^{0.4771})^{27} \qquad 10^{12.88}$

$3 \uparrow\uparrow n$ で遊んでみる

10 のベキを用いて変形してみる

高校の復習

$\log_{10} 3 \quad 0.4771,\ \ 3 = 10^{\log_{10} 3},\ \ (10^a)^b = 10^{a \times b},\ \ 10^a 10^b = 10^{a+b}$

$3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{27} \qquad (10^{0.4771})^{27} \qquad 10^{12.88}$

$3 \uparrow\uparrow (n+1) = 3^{3 \uparrow\uparrow n}$ に注意すると

$3 \uparrow\uparrow 4 \qquad 3^{10^{12.88}} \qquad (10^{0.4771})^{10^{12.88}} \qquad 10^{10^{-0.3214+12.88}} \qquad 10^{10^{12.56}}$

$3 \uparrow\uparrow 5 \qquad 3^{10^{10^{12.56}}} \qquad 10^{0.4771 \times 10^{10^{12.56}}} \qquad 10^{10^{-0.3214+10^{12.56}}} \qquad 10^{10^{10^{12.56}}}$

$3 \uparrow\uparrow n$ で遊んでみる

10 のベキを用いて変形してみる

高校の復習

$\log_{10} 3 \quad 0.4771,\ \ 3 = 10^{\log_{10} 3},\ \ (10^a)^b = 10^{a \times b},\ \ 10^a 10^b = 10^{a+b}$

$3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{27} \qquad (10^{0.4771})^{27} \qquad 10^{12.88}$

$3 \uparrow\uparrow (n+1) = 3^{3 \uparrow\uparrow n}$ に注意すると

$3 \uparrow\uparrow 4 \qquad 3^{10^{12.88}} \qquad (10^{0.4771})^{10^{12.88}} \qquad 10^{10^{-0.3214+12.88}} \qquad 10^{10^{12.56}}$

$3 \uparrow\uparrow 5 \qquad 3^{10^{10^{12.56}}} \qquad 10^{0.4771 \times 10^{10^{12.56}}} \qquad 10^{10^{-0.3214+10^{12.56}}} \qquad 10^{10^{10^{12.56}}}$

最後の式は

$$3^{10^{10^{12.56}}} \qquad 10^{10^{10^{12.56}}} \qquad \leftarrow !!!$$

を意味している。N：十分大だと、3^N と 10^N の差はほとんどない。

$2 \uparrow\uparrow n$ でも遊んでみる

10 のベキを用いて変形してみる

高校の復習

$\log_{10} 2 \quad 0.3010, \ \ 2 = 10^{\log_{10} 2}, \ \ (10^a)^b = 10^{a \times b}, \ \ 10^a 10^b = 10^{a+b}$

$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{16} \qquad (10^{0.3010})^{16} = 10^{4.816}$

$2 \uparrow\uparrow (n+1) = 2^{2 \uparrow\uparrow n}$ に注意すると

$2 \uparrow\uparrow 5 \qquad 2^{10^{4.816}} \qquad (10^{0.3010})^{10^{4.816}} \qquad 10^{10^{-0.5214+4.816}} \qquad 10^{10^{4.295}}$

$2 \uparrow\uparrow 6 \qquad 2^{10^{10^{4.295}}} \qquad 10^{0.3010 \times 10^{10^{4.295}}} \qquad 10^{10^{-0.5214+10^{4.295}}} \qquad 10^{10^{10^{4.295}}}$

$2 \uparrow\uparrow n$ でも遊んでみる

10 のベキを用いて変形してみる

高校の復習

$\log_{10} 2 \quad 0.3010,\ \ 2 = 10^{\log_{10} 2},\ \ (10^a)^b = 10^{a \times b},\ \ 10^a 10^b = 10^{a+b}$

$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{16} \qquad (10^{0.3010})^{16} = 10^{4.816}$

$2 \uparrow\uparrow (n+1) = 2^{2\uparrow\uparrow n}$ に注意すると

$2 \uparrow\uparrow 5 \qquad 2^{10^{4.816}} \qquad (10^{0.3010})^{10^{4.816}} \qquad 10^{10^{-0.5214+4.816}} \qquad 10^{10^{4.295}}$

$2 \uparrow\uparrow 6 \qquad 2^{10^{10^{4.295}}} \qquad 10^{0.3010 \times 10^{10^{4.295}}} \qquad 10^{10^{-0.5214+10^{4.295}}} \qquad 10^{10^{10^{4.295}}}$

$$2 \uparrow\uparrow (n+1) < 3 \uparrow\uparrow n < 2 \uparrow\uparrow (n+2)$$

$a \uparrow\uparrow b$ を越えて

定義 2

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow a}_{b\ \text{コ}}$$

これを $a \uparrow^3 b$ と書く

定義 3

$$a \uparrow^{n+1} b = \underbrace{a \uparrow^n a \uparrow^n \cdots \uparrow^n a}_{b\ \text{コ}}$$

$a \uparrow\uparrow b$ を越えて

定義 2

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow a}_{b\text{ コ}}$$

これを $a \uparrow^3 b$ と書く

定義 3

$$a \uparrow^{n+1} b = \underbrace{a \uparrow^n a \uparrow^n \cdots \uparrow^n a}_{b\text{ コ}}$$

$3 \uparrow^3 3 = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow 3) = 3 \uparrow\uparrow 7625597484987,$

$3 \uparrow^4 3 = 3 \uparrow^3 (3 \uparrow^3 3) = \underbrace{3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow 3}_{3\uparrow\uparrow 7625597484987\text{ コ}}$

グラハム数

$G(x) = 3 \uparrow^{x} 3$ とする。

$$G(4) = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3,$$

グラハム数

$G(x) = 3 \uparrow^{x} 3$ とする。

$$G(4) = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3,$$
$$G^2(4) = 3 \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{G(4)\text{ 本}} 3,$$

グラハム数

$G(x) = 3 \uparrow^x 3$ とする。

$$\begin{aligned} G(4) &= 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3, \\ G^2(4) &= 3 \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{G(4)\text{ 本}} 3, \\ &\vdots \\ G^{64}(4) &= 3 \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{G^{63}(4)\text{ 本}} 3 \end{aligned}$$

この $G^{64}(4)$ がグラハム数と呼ばれる数。

グラハム数

$G(x) = 3 \uparrow^x 3$ とする。

$$G(4) = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3,$$
$$G^2(4) = 3 \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{G(4) \text{ 本}} 3,$$
$$\vdots$$
$$G^{64}(4) = 3 \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{G^{63}(4) \text{ 本}} 3$$

この $G^{64}(4)$ がグラハム数と呼ばれる数。
上記の定義から分かること…でかい。めちゃくちゃでかい。でも有限の数。

中級編

ふぃっしゅ数

- アッカーマン関数
- S 変換
- グラハム数との比較

アッカーマン関数

定義 4

アッカーマン関数 $A(m,k)$ を次で定める。

1. $A(0,k) = k+1$
2. $A(m,0) = A(m-1,1) \qquad m \geq 1$ のとき
3. $A(m,k) = A(m-1, A(m,k-1)) \quad m,\ k \geq 1$ のとき

アッカーマン関数

定義 4

アッカーマン関数 $A(m,k)$ を次で定める。

1. $A(0,k) = k+1$
2. $A(m,0) = A(m-1,1) \qquad m \geq 1$ のとき
3. $A(m,k) = A(m-1, A(m,k-1)) \qquad m,\ k \geq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&A(1,0) = A(0,1) = 2,\\
&A(1,1) = A(0,A(1,0)) = A(0,2) = 3,\\
&A(1,2) = A(0,A(1,1)) = A(0,3) = 4,\\
&A(1,k) = k+2,
\end{aligned}
$$

アッカーマン関数

定義 4

アッカーマン関数 $A(m, k)$ を次で定める。

1. $A(0, k) = k + 1$
2. $A(m, 0) = A(m - 1, 1) \qquad m \geq 1$ のとき
3. $A(m, k) = A(m - 1, A(m, k - 1)) \quad m,\ k \geq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&A(1, 0) = A(0, 1) = 2,\\
&A(1, 1) = A(0, A(1, 0)) = A(0, 2) = 3,\\
&A(1, 2) = A(0, A(1, 1)) = A(0, 3) = 4,\\
&A(1, k) = k + 2,\\
&A(2, 1) = A(1, A(2, 0)) = A(1, A(1, 1)) = A(1, 3) = 5,\\
&A(2, 2) = A(1, A(2, 1)) = A(1, 5) = 7,\\
&A(2, k) = 2k + 3,
\end{aligned}
$$

アッカーマン関数の計算

確認

アッカーマン関数 $A(m,k)$ の計算ルール

1. $A(0,k) = k+1$
2. $A(m,0) = A(m-1,1) \qquad m \geq 1$ のとき
3. $A(m,k) = A(m-1, A(m,k-1)) \quad m,\ k \geq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&A(3,0) = A(2,1) = 5,\\
&A(3,1) = A(2,A(3,0)) = A(2,5) = 13,\\
&A(3,2) = A(2,A(3,1)) = A(2,13) = 29,\\
&A(3,3) = A(2,A(3,2)) = A(2,29) = 61,\\
&A(3,k) > 2^k,
\end{aligned}
$$

アッカーマン関数の計算

確認

アッカーマン関数 $A(m,k)$ の計算ルール

1. $A(0,k) = k+1$
2. $A(m,0) = A(m-1,1) \qquad m \geq 1$ のとき
3. $A(m,k) = A(m-1, A(m,k-1)) \qquad m,\ k \geq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&A(3,0) = A(2,1) = 5,\\
&A(3,1) = A(2,A(3,0)) = A(2,5) = 13,\\
&A(3,2) = A(2,A(3,1)) = A(2,13) = 29,\\
&A(3,3) = A(2,A(3,2)) = A(2,29) = 61,\\
&A(3,k) > 2^k,\\
&A(4,1) = A(3,A(4,0)) = A(3,A(3,1)) = A(3,13) > 2^{13} > 2 \uparrow\uparrow 3,\\
&A(4,2) = A(3,A(4,1)) > A(3, 2 \uparrow\uparrow 3) > 2 \uparrow\uparrow 4,\\
&A(4,k) > 2 \uparrow\uparrow (k+2) > 3 \uparrow\uparrow k,
\end{aligned}
$$

アッカーマン関数からふぃっしゅ数へ

先ほどの計算から

$$A(m,k) > 3 \uparrow^{m-2} k$$

アッカーマン関数は任意の $\uparrow^n$ と同等以上の強さをもつ。

アッカーマン関数からふぃっしゅ数へ

先ほどの計算から

$$A(m,k) > 3 \uparrow^{m-2} k$$

アッカーマン関数は任意の $\uparrow^n$ と同等以上の強さをもつ。

記号の定義

$\mathbb{N}$：自然数全体の集合、$\mathbb{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$：関数全体の集合、
$\mathbb{S} = \{\mathbb{N} \times \mathbb{F} \to \mathbb{N} \times \mathbb{F}\}$：$S$ 変換全体の集合

定義 5

関数 f に対して、2 変数関数 $B_f(x,y)$ を次で定める。

1. $B_f(0,y) = f(y)$
2. $B_f(x,0) = B_f(x-1,1) \qquad x \geq 1$ のとき
3. $B_f(x,y) = B_f(x-1, B_f(x,y-1)) \qquad x,\ y \geq 1$ のとき

ふぃっしゅ数

特別な元 $\mathbb{S} \ni S_0 \colon (n, f) \mapsto (m, g)$ を次で定める。

$$g(x) = B_f(x, x), \quad m = g(n)$$

ふぃっしゅ数

特別な元 $\mathbb{S} \ni S_0 \colon (n, f) \mapsto (m, g)$ を次で定める。

$$g(x) = B_f(x, x), \quad m = g(n)$$

定義 6

$$SS \colon \mathbb{N} \times \mathbb{F} \times \mathbb{S} \to \mathbb{N} \times \mathbb{F} \times \mathbb{S}$$

を $SS(n, f, S) = (S^{f(n)}(n, f), S^{f(n)})$ で定める。
$f_0(x) = x + 1$ として、ふぃっしゅ数を $SS^{63}(3, f_0, S_0)$ と定める。

グラハム数と比較する

まず $SS(3, f_0, S_0)$ を計算してみる。
$SS(3, f_0, S_0) = (S_0^{f_0(3)}(3, f_0), S_0^{f_0(3)}) = (S_0^4(3, f_0), S_0^4)$

グラハム数と比較する

まず $SS(3, f_0, S_0)$ を計算してみる。
$SS(3, f_0, S_0) = (S_0^{f_0(3)}(3, f_0), S_0^{f_0(3)}) = (S_0^4(3, f_0), S_0^4)$

この1回目の S_0 変換を計算する。
$B_{f_0} = A$ (アッカーマン関数) に注意すると、
$S_0(3, f_0) = (A(3,3), f_1) = (61, f_1)$ ここで $f_1(x) = A(x, x)$.

グラハム数と比較する

まず $SS(3, f_0, S_0)$ を計算してみる。
$SS(3, f_0, S_0) = (S_0^{f_0(3)}(3, f_0), S_0^{f_0(3)}) = (S_0^4(3, f_0), S_0^4)$

この１回目の S_0 変換を計算する。
$B_{f_0} = A$ (アッカーマン関数) に注意すると、
$S_0(3, f_0) = (A(3, 3), f_1) = (61, f_1)$ ここで $f_1(x) = A(x, x)$.

２回目
$S_0(61, f_1) = (B_{f_1}(61, 61), f_2)$ ここで $f_2(x) = B_{f_1}(x, x)$

$$
\begin{aligned}
f_2(1) &= B_{f_1}(1, 1) = B_{f_1}(0, B_{f_1}(1, 0)) = B_{f_1}(0, B_{f_1}(0, 1)) = f_1(f_1(1)) \\
&= A(A(1, 1), A(1, 1)) = A(3, 3) = 61
\end{aligned}
$$

グラハム数と比較する

まず $SS(3, f_0, S_0)$ を計算してみる。
$SS(3, f_0, S_0) = (S_0^{f_0(3)}(3, f_0), S_0^{f_0(3)}) = (S_0^4(3, f_0), S_0^4)$

この１回目の S_0 変換を計算する。
$B_{f_0} = A$ (アッカーマン関数) に注意すると、
$S_0(3, f_0) = (A(3,3), f_1) = (61, f_1)$ ここで $f_1(x) = A(x, x)$.

２回目
$S_0(61, f_1) = (B_{f_1}(61, 61), f_2)$ ここで $f_2(x) = B_{f_1}(x, x)$

$$f_2(1) = B_{f_1}(1,1) = B_{f_1}(0, B_{f_1}(1,0)) = B_{f_1}(0, B_{f_1}(0,1)) = f_1(f_1(1))$$
$$= A(A(1,1), A(1,1)) = A(3,3) = 61$$

次に $f_2(2)$ を計算する。

戦闘力、たったのグラハム数か

$$f_2(2) = B_{f_1}(2,2) = B_{f_1}(1, B_{f_1}(2,1)) = B_{f_1}(1, B_{f_1}(1, B_{f_1}(2,0)))$$
$$= B_{f_1}(1, B_{f_1}(1, B_{f_1}(1,1))) = B_{f_1}(1, \underline{B_{f_1}(1,61)})$$

戦闘力、たったのグラハム数か

$$f_2(2) = B_{f_1}(2,2) = B_{f_1}(1, B_{f_1}(2,1)) = B_{f_1}(1, B_{f_1}(1, B_{f_1}(2,0))) \\ = B_{f_1}(1, B_{f_1}(1, B_{f_1}(1,1))) = B_{f_1}(1, \underline{B_{f_1}(1,61)})$$

$$B_{f_1}(1,2) = B_{f_1}(0, B_{f_1}(1,1)) = A(61,61) > 3 \uparrow^{59} 61 > 3 \uparrow^{4} 3 = G(4)$$

$$B_{f_1}(1,3) = B_{f_1}(0, B_{f_1}(1,2)) = A(A(61,61), A(61,61)) \\ > A(G(4)+2, 3) > 3 \uparrow^{G(4)} 3 = G^2(4)$$

戦闘力、たったのグラハム数か

$$f_2(2) = B_{f_1}(2,2) = B_{f_1}(1, B_{f_1}(2,1)) = B_{f_1}(1, B_{f_1}(1, B_{f_1}(2,0)))$$
$$= B_{f_1}(1, B_{f_1}(1, B_{f_1}(1,1))) = B_{f_1}(1, \underline{B_{f_1}(1,61)})$$

$$B_{f_1}(1,2) = B_{f_1}(0, B_{f_1}(1,1)) = A(61,61) > 3 \uparrow^{59} 61 > 3 \uparrow^{4} 3 = G(4)$$
$$B_{f_1}(1,3) = B_{f_1}(0, B_{f_1}(1,2)) = A(A(61,61), A(61,61))$$
$$> A(G(4)+2,3) > 3 \uparrow^{G(4)} 3 = G^2(4)$$

命題 1

$$B_{f_1}(1, n+1) > G^n(4)$$

そして当然　$\underline{B_{f_1}(1,61)} \gg 64+1$

ゆえに　$f_2(2) \gg G^{64}(4) =$ グラハム数

S_0 変換の 2 回目で $f_2(61) \gg f_2(2) \gg$ グラハム数 を得た。

君がッ 泣くまで 繰り返すのをやめないッ！

S_0 変換をさらに 2 回して、ようやく 1 回目の SS 変換が終わる。その後、さらに SS 変換を 62 回施して得られる数がふぃっしゅ数。

ちなみに 2 回目の SS 変換は S_0 変換を（正確には S_0^4 を）グラハム数よりはるかに大きい回数繰り返すというもの。

上級編

ふぃっしゅ数 ver.3

- 順序数
- 急成長階層
- 関数の入れ子とその階層

上級編

ふぃっしゅ数 ver.3

- 順序数
- 急成長階層
- 関数の入れ子とその階層

ということについて発表を行いましたが、上級編については不出来だったのと、ふぃっしゅ数 $\gg$ グラハム数を示すことがハイライトだったのでこの版では省略しています。