リーマンゼータ関数について

三重積

リーマンゼータ関数は, 実部が 1 より大きい複素数に対して,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

で定義される関数であり, 様々な興味深い性質をもつ.

例えば, $\zeta(s)$ の $s = 2m$ $(m \in \mathbb{Z}_{>0})$ における値は, 意外にも円周率と結びつく. これはオイラーによる発見であり, オイラーは 1735 年頃,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

を発見し, 以降 $\zeta(s)$ の興味深い性質をいくつも発見した. $\zeta(s)$ を素数に関する積の形で表示するオイラー積

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

もその一つである.

また, リーマンは, 1859 年の論文で $\zeta(s)$ の複素関数としての性質を調べ, $\zeta(s)$ が素数分布（与えられた数より小さい素数がいくつあるか）と密接に関わることを明らかにした. かの有名なリーマン予想も, この論文から生まれたものである.

現代の整数論において, 「ゼータ関数」と総称される様々な関数たちが非常に重要な研究対象となっているが, リーマンゼータ関数はこれらの元祖的な位置づけにある関数であり, この関数の不思議さや面白さが, 多くの研究の動機となっている.

この発表では, 整数論やゼータ関数に興味を持つ初学者の方向けに, 上記のようなリーマンゼータ関数の特殊値や複素関数としての性質, 素数との関係について, いくつかの基本的な性質を紹介します. ひとつひとつの数学的事実を厳密に証明することはしませんが, リーマンゼータ関数がどんな感じのものなのかを掴む手助けとなるような発表を目指します.