曲面上の「直線」と「最短線」

2014.9.14

ring

目的

●この講演を聞いて家に帰ったあとに「ちょっと測地線の方程式でも調べてみるか…」と手を動かしてもらえること

●Levi-Civita接続を理解してもらえること

内容

- R^3内の曲面の「最短線」は「直線」であること

- R^3内の回転面の測地線の振舞い

- 一般の曲面の「直線」と「最短線」の関係

※高校3年生～大学1回生向けです。
予備知識は偏微分だけ(のつもり)です。

§0.準備

準備1.
記号(notation)

テンソル解析の記法

- 曲面のパラメータは u^1, u^2 と上付きの添え字で表します。

…ベキ乗ではありません。

- 具体例のときは適宜読み替えてください。例えば極座標なら $u^1 = r, u^2 = \theta$ です。

テンソル解析の記法

- u^1, u^2 での偏微分はそれぞれ ∂_1, ∂_2 で表します。

- 例えば $f(u^1, u^2) = (u^1)^2 + \cos u^2$ なら

$$\partial_1 f = 2u^1,\ \partial_2 f = -\sin u^2$$

です。

Einstein記法

- 上と下に同じ添え字が現れたら和をとります。
  - $a^i b_i = a^1 b_1 + a^2 b_2$
  - $g_{ij} x^i x^j = g_{11} x^1 x^1 + g_{12} x^1 x^2$
    $\qquad + g_{21} x^2 x^1 + g_{22} x^2 x^2$
- この講演では添え字は1と2です。

Einstein記法(練習)

- 行列の計算

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{bmatrix} \text{の}(i,j)\text{成分} = a_k^i b_j^k$$

- 合成関数の微分

$f(u^1,u^2)$ と $u^1(t), u^2(t)$ について

$$\dot{f} = \partial_i f\, \dot{u}^i$$

準備2.
3次元空間内の曲面

空間内の曲面

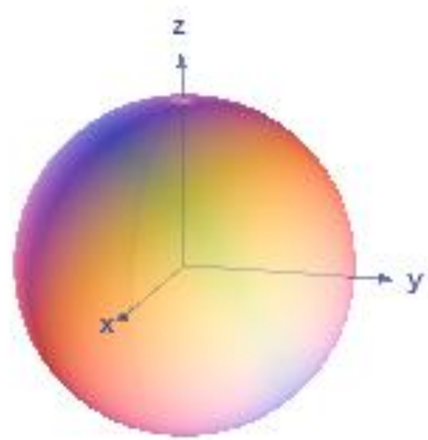
● 曲面のパラメータ表示

$$\boldsymbol{p}: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$$

$$\boldsymbol{p}(u^1, u^2) = \begin{bmatrix} x\,(u^1, u^2) \\ y\,(u^1, u^2) \\ z\,(u^1, u^2) \end{bmatrix}$$

例（単位球面）

$$\boldsymbol{p}(\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$



Gauss枠

- $\boldsymbol{p}$の偏微分$\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$が接平面の基底になる。

$$\boldsymbol{p}_i \coloneqq \partial_i \boldsymbol{p}$$

- $\boldsymbol{R}^3$の基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{e}\}$ をGauss枠という。

$$\boldsymbol{e} \coloneqq \frac{\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}_2}{|\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}_2|}$$

第一基本量

- $g_{ij} := \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_j$を第一基本量という。

  ※ $g_{ji} = g_{ij}$

- 接ベクトル $\xi = \xi^i \boldsymbol{p}_i$ の長さの2乗は

$$g_{ij}\xi^i\xi^j$$

  で与えられる。

- 曲線の長さも第一基本量から計算できる。

  …曲線の長さは速度ベクトルの長さの積分。

Christoffel記号（接続係数）

- $\boldsymbol{p}_{ij} \coloneqq \partial_j \partial_i \boldsymbol{p} = \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{p}_k + h_{ij} \boldsymbol{e}$ という式で

  Γ_{ij}^k, h_{ij} という量を定義する。
- Γ_{ij}^k を第二種Christoffel記号という。

  ※$\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k$

…h_{ij} を第二基本量という。

第二種Christoffel記号の公式

- 第二種Christoffel記号は第一基本量で書ける。(重要)

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$$

※ g^{kl} は g_{ij} の逆行列。

証明

- 第一種Chrisoffel記号を次で定める。

$$\Gamma_{k,ij} := \Gamma^{l}_{ij} g_{lk}$$

- cyclicに添え字を動かし、2つ足して1つ引く。

–「どうしてこの組合せなのか…」

　by深谷賢治先生

例（平面の極座標）

- $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$

- $\boldsymbol{p}_r = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_\theta = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$

例（平面の極座標）

- $g_{rr} = 1,\ g_{\theta\theta} = r^2$
- $g^{rr} = 1,\ g^{\theta\theta} = \dfrac{1}{r^2}$
- $\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \dfrac{1}{r}$
- $\Gamma^{r}_{\theta\theta} = -r$

※その他はすべて0。

§1.3次元空間内の曲面の測地線

曲面上の曲線

- 曲面上の曲線のパラメータ表示

$$\boldsymbol{c}\colon \boldsymbol{R} \to M \quad (M := \mathrm{Im}\,\boldsymbol{p})$$

$$\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{p}(u^1(t), u^2(t))$$

速度ベクトル・加速度ベクトル

- $\boldsymbol{c}$ を微分したものが速度ベクトル。

$$\dot{\boldsymbol{c}} = \dot{u}^i \boldsymbol{p}_i$$

- 二階微分したものが加速度ベクトル。

$$\ddot{\boldsymbol{c}} = \left(\ddot{u}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right)\boldsymbol{p}_k + h_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\boldsymbol{e}$$

- 速度ベクトルは曲面に接しているが

  加速度ベクトルは曲面に接していない。

共変微分

- 加速度ベクトルを接平面に射影して、それを曲面上の曲線の曲がり具合とみる。

$$\frac{D\dot{\boldsymbol{c}}}{dt} := \left(\ddot{u}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j\right)\boldsymbol{p}_k$$

- 一般に、曲面上の曲線に沿ったベクトル場を微分して接平面に射影する操作を共変微分という。

測地線

- $\dfrac{D\dot{c}}{dt}$ のことを測地的曲率という。
- 測地的曲率が0となる曲線を測地線という。

$$\ddot{u}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j = 0$$

- 測地線が曲面上の「直線」。

測地線のパラメータ

- 加速度=0なので、測地線の方程式は曲線の形を決めるだけではなく等速となるパラメータまで要求している。

$$|\dot{\boldsymbol{c}}|^2 = g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j = \text{定数}$$

曲線の長さ・弧長パラメータ

- 曲線の長さは速度ベクトルの長さの積分。

$$\boldsymbol{c}\colon [a,b] \to M$$

$$L(\boldsymbol{c}) := \int_a^b |\dot{\boldsymbol{c}}| dt$$

- 速さが1のパラメータを弧長パラメータという。

$$|\dot{\boldsymbol{c}}| = 1$$

極値問題

- 曲面上の2点P, Qを結ぶ曲線のうち長さが最小のものを求めたい。
- 曲線 $\boldsymbol{c}$ を以下を満たす最短線とする。

$$\boldsymbol{c}\colon [0, l] \to M$$
$$\boldsymbol{c}(0) = P, \boldsymbol{c}(l) = Q$$
$$|\dot{\boldsymbol{c}}| = 1$$

※これらの条件から$L(\boldsymbol{c}) = l$ 。

変分法

- $\boldsymbol{c}$ の変分 $\boldsymbol{f}(t,\lambda)$ を次のようにとる。

$$\boldsymbol{f}\colon [0,l]\times[-\epsilon,\epsilon]\to M$$

$$\boldsymbol{f}(t,0)=\boldsymbol{c}(t)$$

$$\boldsymbol{f}(0,\lambda)=P,\boldsymbol{f}(l,\lambda)=Q$$

- $\boldsymbol{c}$ が最短線ならば$L(\lambda) := \int_0^l \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| dt$として

$$\frac{dL}{d\lambda}=0$$

となる。(どんな変分$\boldsymbol{f}$についても)

弧長の第一変分公式

- 次の等式を弧長の第一変分公式という。

$$\frac{dL}{d\lambda}(0) = -\int_0^l \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \lambda} \cdot \frac{D\dot{\boldsymbol{c}}}{dt}\, dt$$

- この公式から、最短線は

$$\frac{D\dot{\boldsymbol{c}}}{dt} = 0$$

をみたすことがわかる。

「最短線」は「直線（測地線）」

- 最短線であるための必要条件は

$$\frac{D\dot{\boldsymbol{c}}}{dt}=0$$

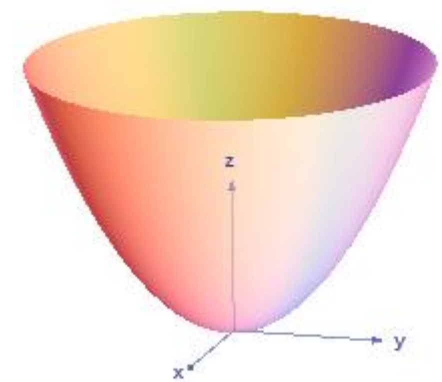
つまり測地線であること。

※逆は必ずしも真ではない。

例(回転放物面)

- 放物線$z=\frac{1}{2}x^2$をz軸回りに回転させる。

$$\boldsymbol{p}(r,\theta)=\begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ r^2/2 \end{bmatrix}$$



- $\boldsymbol{p}_r=\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ r \end{bmatrix},\boldsymbol{p}_\theta=\begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$

例(回転放物面)

- $g_{rr} = 1 + r^2,\ g_{\theta\theta} = r^2$
- $g^{rr} = \frac{1}{1+r^2},\ \ g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}$
- $\Gamma^r_{rr} = \frac{r}{1+r^2}$
- $\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}$
- $\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r}{1+r^2}$

※その他はすべて0。

例(回転放物面)

- 測地線の方程式

$$\ddot{r} + \frac{r}{1+r^2}(\dot{r}^2 - \dot{\theta}^2) = 0$$

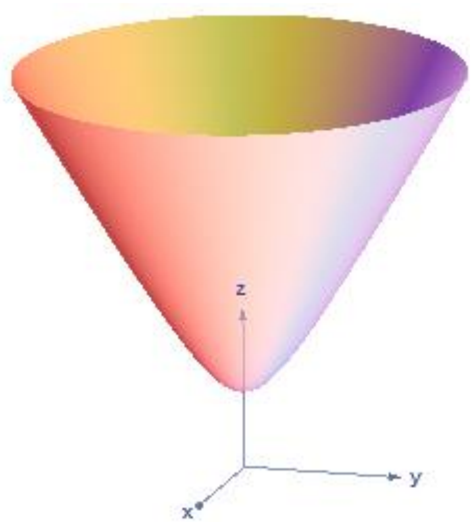
$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

- $t \to \infty$ とすると曲面上を無限回回転する。

例(二葉双曲面)

- 双曲線$z^2-x^2=1$をz軸回りに回転させる。

$$\boldsymbol{p}(u,\theta)=\begin{bmatrix}\sinh u\cos\theta\\ \sinh u\sin\theta\\ \cosh u\end{bmatrix}$$



例(二葉双曲面)

- 測地線の方程式

$$\ddot{u} + \tanh 2u\,(\dot{u}^2 - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2) = 0$$

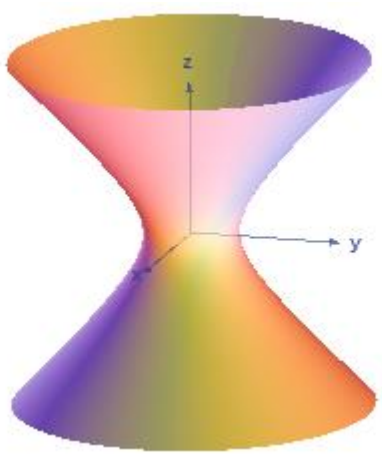
$$\ddot{\theta} + 2\coth u\,\dot{u}\dot{\theta} = 0$$

- $t \to \infty$ とすると曲面上を有限回回転して子午線に漸近する。

例(一葉双曲面)

- 双曲線$x^2 - z^2 = 1$をz軸回りに回転させる。

$$\boldsymbol{p}(u,\theta) = \begin{bmatrix} \cosh u \cos\theta \\ \cosh u \sin\theta \\ \sinh u \end{bmatrix}$$



例(一葉双曲面)

- 測地線の方程式

$$\ddot{u} + \tanh 2u\,(\dot{u}^2 - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2) = 0$$

$$\ddot{\theta} + 2\tanh u\,\dot{u}\dot{\theta} = 0$$

- $t \to \infty$ とすると最初の向きにより±∞にいくか平行円に収束する。

解析力学的に…

- 測地線はLagrangian

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j$$

の作用積分(曲線のエネルギー)の停留点。

- Legendre変換するとHamiltonianは

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j$$

回転面の場合

● 回転対称性を持つのでNoetherの定理より保存量が存在する。

→Hamiltonianと合わせて2つの第一積分を持ち完全積分可能系となる。

§2. 一般の曲面

量的関係

- “「何重にも拡がったもの」が何種類もの量的関係を有し得ること、したがって空間は「三重に拡がったもの」の特別な場合にしかすぎないことが導かれる。”

「幾何学の基礎をなす仮説について」

1854年　G.F.B.Riemann

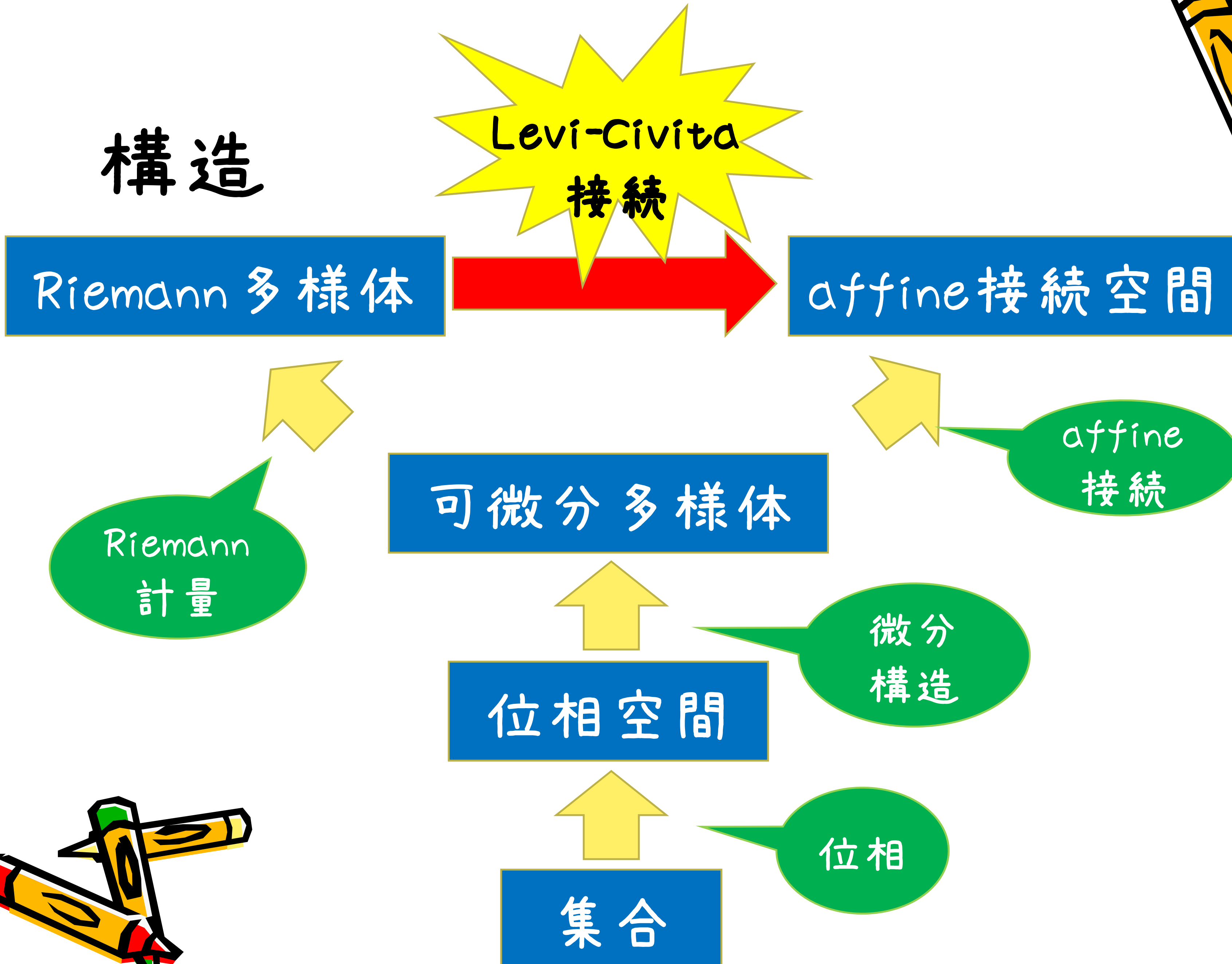
まとめると

- 何重にも拡がったもの(多様体)には量的関係(Riemann計量)と幾何的関係(affine接続)がそれぞれ独立に入れられる。
- 量的関係は「最短線」という概念を、幾何的関係は「直線(測地線)」という概念を定める。
- 量的関係はそれと整合するただ1つの幾何的関係(Levi-Civita接続)を誘導し、その量的関係における最短線はLevi-Civita接続に関する測地線となる。

比べると

	Riemann計量	affine接続
意味	量的関係	幾何的関係
もの	接空間の内積	ベクトル場の方向微分
線	最短線	測地線
備考	整合する唯一の接続（Levi-Civita接続）を誘導	接続が与えられると曲率が計算できる

構造


Levi-Civita
接続
Riemann多様体
affine接続空間
Riemann
計量
affine
接続
可微分多様体
微分
構造
位相空間
位相
集合

共変微分(接続)

- 曲線に沿ったベクトル場の微分。
- 曲線に沿ったベクトル場から曲線に沿ったベクトル場への線形写像でLeibniz則をみたすもの。

$$\frac{D(f\xi)}{dt} = \frac{df}{dt}\xi + f\frac{D\xi}{dt}$$

- 接続が与えられると曲率が計算できる。

Riemann計量

- 接空間の内積(正定値対称双一次形式)。
- 3次元空間内の曲面の第一基本量に相当。
- Riemann計量を与えると曲線の長さが定まる。

※Riemannは講演の中で一般の場合に言及。

“その次に簡単な場合は線素が4次の微分形式の4乗根として表される場合となるであろう。(中略)が、かなり面倒な上に結果が幾何学的に表現できないから、空間の研究にはあまり新しい光明を与えないであろう。”

Levi-Civita接続

- Riemann計量$\langle\ ,\ \rangle$が与えられたとき、
  - $\dfrac{D}{\partial s}\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{D}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial s} \qquad (f : \boldsymbol{R}^2 \to M)$
  - $\dfrac{d}{dt}\langle \xi, \boldsymbol{\eta} \rangle = \left\langle \dfrac{D\xi}{dt}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle + \left\langle \xi, \dfrac{D\boldsymbol{\eta}}{dt} \right\rangle$

  をみたす接続をLevi-Civita接続という。
- Riemann計量に関する最短線はそれに対応するLevi-Civita接続に関する測地線。

例(Poincare上半平面)

- $\boldsymbol{H} = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 | y > 0\}$
- $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$
  - $g_{11} = g_{22} = \dfrac{1}{y^2}, g_{12} = g_{21} = 0$
- 測地線はy軸に平行な半直線または中心をx軸上にもつ半円。

(参考)一般相対性理論

●Einstein方程式

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\kappa T_{\mu\nu}$$

…物質の配置(エネルギー運動量テンソル$T_{\mu\nu}$)から時空の計量を求める。

…Newton力学で言うと万有引力の法則。

(物質の配置からポテンシャルが定まる。)

（参考）一般相対性理論

●運動方程式

$$\ddot{u}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j = 0$$

…時空の計量に沿って“まっすぐ”運動する。

…Newton力学の運動方程式に相当。