有限要素法～連続体力学への応用～

佐藤

一次元のディリクレ境界値問題を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x)((a,b) \subset R\text{上}) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

これは以下の境界値問題と同値である：

$$\int_a^b \frac{du}{dx}(x)\frac{dv}{dx}(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad \left({}^\forall v \in H_0^1(a,b) \right) \tag{2}$$

（2）を（1）の弱形式という。工学の世界では仮想仕事式と呼ばれている。

区間(a,b)をn等分（$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$）して以下の境界値問題を考える：

$$\int_a^b \frac{du_h}{dx}(x)\frac{dv}{dx}(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad \left({}^\forall v \in S_h \right) \tag{3}$$

（3）を満たす$u_h \in S_h$を見つける問題を（2）の有限要素問題（有限要素法）という。

連続体力学に於ける、単純引張りの境界値問題は以下のようになる：

$$\begin{cases} E\dfrac{d^2u}{dx^2} = 0(\text{内部の点}) \\ u(0) = 0(\text{固定している面}) \\ E\dfrac{du}{dx}(L) = f(\text{荷重面}) \end{cases} \tag{4}$$

これは、ディリクレ境界条件とノイマン境界条件の混合問題である。
有限要素法を用いて近似解（この場合厳密解と一致）を求められる。
構造物が複雑な場合、厳密解を求めることが困難である。そのため実際の現場では
有限要素法を用いて解析し、強度解析、振動解析、熱伝導解析を行っている。

参考文献

[1] Larsson,Partial Differential Equations with Numerical Methods,Springer
[2] 京谷 孝史,よくわかる連続体力学ノート,森北出版株式会社
[3] 野村 大次,有限要素法解析 基礎と実践,丸善出版
[4] 梅垣 壽春,情報数理の基礎—関数解析的展開,サイエンス社