Selbergの漸近公式と素数定理

関 真一朗

素数の分布を調べることは非常に難しい問題であるが, 1792(1793?) 年に Gauss は次の定理が成り立つことを予想した. これは既に証明されており, **"素数定理 (PRIME NUMBER THEOREM = PNT)"** と呼ばれている.

Theorem 1 (PNT)**.** *$x(>0)$ 以下の素数の個数を $\pi(x)$ と表すとき,*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=1$$

が成立する.

PNT は 1896 年に Hadamard と de la Vallee-Poussin によって独立に証明された. その証明は複素関数 $\zeta(s)$(Riemann ゼータ関数) の零点に関する次の定理を用いる複素解析的な証明であった. (Thm2 から PNT を導出する証明が書いてある参考文献として [1, 第 10 章], [3] がある.[1])

Theorem 2. *$s\neq -2,-4,-6,\cdots\in\mathbb{C}$ が $\zeta(s)$ の零点であるならば,*

$$0<\mathrm{Re}(s)<1$$

を満たす.

PNT は Thm2 と同値であることが知られていたこともあり, 複素関数論なしには証明できないと考えられていた. しかし, 驚くべきことに, 1949 年に Selberg と Erdös は初等的な証明を独立に発表した.[2] 実際には, Selberg は当時知られていなかった次の公式を証明した ([2]. Selberg は "基本公式" と呼んでいる). $\vartheta(x):=\sum_{p\leq x}\log p$ とし, シグマは x 以下の素数全体にわたる和を表すものとする.

Theorem 3 (Selberg の漸近公式)**.** *$x\to\infty$ とするとき, 次の公式が成立する:*

$$\vartheta(x)\log x+\sum_{p\leq x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\log p=2x\log x+O(x).$$

Selberg は非常に巧みな対数計算を行うことによりこの公式を証明しており, 講演の前半ではその証明について解説する. 講演の後半では, いかにして Selberg の漸近公式から PNT が導出されるかについての解説を行う. なお, Selberg の証明は大変な計算を伴うものになっており, その全てを 90 分という限られた時間で実行することは不可能である. よって, 講演では証明の筋道を解説することに焦点をあて, 細かい計算部分については資料を配布する予定である ([2] はいわゆる '行間' が非常に広いので, 読むには根気が必要である).

参考文献

[1] 河田敬義, 数論—古典数論から類体論へ, 岩波書店 (1992).

[2] A. Selberg, *An elementary proof of the prime-number theorem*, Ann. of Math. (2)50(1949), pp. 305–313.

[3] D. Zagier, *Newman's short proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Month. (8)104(1997), pp. 705–708.

[1] [1] は池原による Tauber 型定理を用いた証明である. [3] は Newman の着想に基づいた証明であるが, なんと self-contained にたった 4 ページでまとめている!

[2] '初等的' とは '対数と Landau の記号に関する簡単な算術のみを用いて, 複素数および Riemann ゼータ関数は一切用いない' という程度の意味合いである (決して, '簡単' という意味ではないことに注意).