ちょっとばかりイレギュラーなアーベル群をつくるはなし

@515hikaru

2014 年 7 月 25 日

内容概説

普通に生きていたらアーベル群くらい日常的に出会うと思うが、 今回はそのなじみ深いアーベル群の中でも少しばかりイレギュラーなものを作ってみようと思う。

たとえば、 こんな定理がある。

直積分解の基本定理

G : 群, Ω : 集合, $G \curvearrowright \Omega$として、$G$ がΩ主組成列を持つとする。このとき、G は有限個の直既約な部分Ω群の直積に分解される。

$$G = H_1 \times H_2 \times \cdots H_n = K_1 \times K_2 \times \cdots K_m \tag{1}$$

と二通りに分解されたとすると、$n = m$ が成立し、任意に r 個の $H_{i_1}, H_{i_2}, \cdots H_{i_r}$ の因子を選んだとき、第 2 の因子である $K_{j_1}, K_{j_2}, \cdots K_{j_r}$ たちでそれらを置き換えることができる。

これは、 **Krull-Remak-Schmidt の定理** と言われている定理で、直積分解が (Ω主組成列を持てば) ほぼ一意的に定まることを示している。

逆に、 今回の講演では次を示す:

今回の講演のテーマ

無限アーベル群で、 主組成列を持たず、 Krull-Remak-Schmidt の定理が成立しないものが存在する

他に時間があれば、次のようなことを証明する:

時間があればやりたいこと

1. 無限巡回群の加算無限個の完全直和 (直積) A は自由ではないこと
2. 上で定義した A の任意の加算部分群は自由であること
3. $GL(n, \mathbb{Z})$ の可換部分群 B は有限生成であること

予備知識

群の定義などの基礎的な知識は仮定するが、 あまりなじみ深くないであろう定義や用語については説明する。(組成列など)

参考文献

[1]『群論 上』(岩波書店) · 鈴木通夫 (用語などはこの本によっている)

[2]『Abelian Groups』(Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics) · Fuchs Laszlo