超越数入門

なれ (@nareO7)

1 講演概要

本講演では，超越数の判定法について例を交えながら話す．代数的数，超越数とは，以下のような数のことを指す．

Definition 1. 実数 α について，ある有理数係数の多項式 $f(X) \neq 0$ が存在して $f(\alpha) = 0$ となるとき，代数的数という．また，代数的数でない実数を超越数という．

e や π が超越数であることは有名だが，一般に与えられた実数を超越数かどうか判定することは難しい問題である．例えば，$e + \pi$, γ (オイラー定数), $\zeta(2n+1)$ ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$) などのかなり特別な定数ですら超越数かどうかわかっていない．では，どのようにして超越数かの判定を行うかというと，与えられた実数の 10 進数表示の桁の並びがどのようになっていれば超越数になるかを考える．次の数は，e, π よりも以前に超越数であることが示された数で，本講演でも証明を与える予定である．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0.110001000000000000000001\ldots$$

この数の桁を見ると，$n!$ 桁目だけ 1 で他が 0 というような桁の並びになっている．証明には，”代数的数を有理数でどれくらいうまく近似できるか”に関する Liouville の定理とよばれるものを用いる．

Liouville の定理は 1900 年ごろに証明された定理で，現在ではこれよりも強力な近似の定理がいくつも存在する．本講演では，近似の定理の応用として超越数の判定に関する定理を紹介するとともに，皆さんに口からどんどん超越数を出せるようになってもらうのが目的である．

2 予備知識

一部証明を与えるところを除けば，予備知識はほとんどいらない (いらなくても聞けるようがんばります)．その一部の証明のところも，簡単な微積分を知っていれば大丈夫だと思います．

参考文献

[1] 塩川 宇賢, 無理数と超越数, 森北出版 (1999).

[2] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases*, Ann. of Math. 165 (2007), 547-565.

[3] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Mathematics 785, Springer, Berlin, (1980).