理論物理学者ディラックは1930年に著した「量子力学」において「δ関数」を用いた:

$\delta(0)=\infty$, $\delta(x)=0\ (x\neq 0)$, $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$, R^1上連続な任意の関数fに対して$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)f(x)dx=f(x_0)$

$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx$をルベーグ積分で考えても$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=0$であるから,このような関数は存在しない.しかし,積分の線型性により

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)(af(x)+bg(x))dx=a\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)f(x)dx+b\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)g(x)dx=af(x_0)+bg(x_0)$$

であるから,δは何らかの関数空間で定義された線型汎関数($\mathbb{C}$への線型写像)と考えられる.

私は物理学を殆んど知らないし,他に良い数学的な導入の仕方が見つからないので,「弱微分」により「超関数」を導入しよう.

$u,\varphi\in C^1(R^1)$に対して部分積分により

$$\int_{-\infty}^{\infty}u'(x)\varphi(x)dx=u(x)\varphi(x)\Big|_{x\to-\infty}^{x\to\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\varphi'(x)dx$$

であるが,φがコンパクトな台$\mathrm{supp}\,\varphi=\overline{\{x\in R^1\mid\varphi(x)\neq 0\}}$を持つならば十分大きな$X>0$に対して$\varphi(X)=\varphi(-X)=0$であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}u'(x)\varphi(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\varphi'(x)dx$$

を得る.この等式の右辺は$u\in C^1(R^1)$でなくともR^1の任意のコンパクト集合で(特に$\mathrm{supp}\,\varphi'$で)可積分であれば意味を持つ.そこで$u\in L^1_{loc}(R^1)$の弱微分Duを

$\forall\varphi\in C_0^1(R^1)$, $\int_{-\infty}^{\infty}Du(x)\varphi(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\varphi'(x)dx$が成り立つ関数

として定義する.$u\in C^1(R^1)$であれば再び部分積分により

$$-\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\varphi'(x)dx=-u(x)\varphi(x)\Big|_{x\to-\infty}^{x\to\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}u'(x)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}u'(x)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}Du(x)\varphi(x)dx$$

であるから$Du=u'$を得る.故に弱微分は微分の一般化である.

弱微分の定義から写像

$f_u: C_0^1(R^1)\ni\varphi\longmapsto\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\varphi(x)dx\in\mathbb{C}$, $Df_u: C_0^1(R^1)\ni\varphi\longmapsto-\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\varphi'(x)dx\in\mathbb{C}$

が定まる.f_uとDf_uを以下に述べる関数空間$\mathcal{D}$上の連続線型汎関数とみたものが超関数の一種である.

$\mathcal{D}$を,R^1上でコンパクトな台を持つC^1級関数の空間$C_0^1(R^1)$に位相

[$\{\varphi_n\}\subset C_0^1(R^1)$が$\mathcal{D}$の中で$\varphi\in C_0^1(R^1)$に収束するとは,あるコンパクト集合$K\subset R^1$が存在して全ての番号$n$について $\mathrm{supp}\,\varphi_n=\overline{\{x\in R^1\mid\varphi_n(x)\neq 0\}}\subseteq K$かつ一様に$\lim\varphi_n=\varphi$, $\lim\varphi_n'=\varphi'$.これを$\lim\varphi_n\overset{\mathcal{D}}{=}\varphi$と表す]

が入った関数空関とする.$\mathcal{D}$上の連続線型汎関数の空間を$\mathcal{D}^*$とする.f_u, $Df_u\in\mathcal{D}^*$である.すなわち,

f_u, Df_u, $\mathcal{D}$をこのように定めたとき,$\lim\varphi_n\overset{\mathcal{D}}{=}\varphi\Rightarrow\lim f_u(\varphi_n)=f_u(\varphi)$, $\lim Df_u(\varphi_n)=Df_u(\varphi)$が成り立つ:

$\lim\varphi_n\overset{\mathcal{D}}{=}\varphi\Leftrightarrow\lim(\varphi_n-\varphi)\overset{\mathcal{D}}{=}0$, $\lim f_u(\varphi_n)=f_u(\varphi)\Leftrightarrow\lim f_u(\varphi_n-\varphi)=\lim(f_u(\varphi_n)-f_u(\varphi))=0$;

$\lim Df_u(\varphi_n)=Df_u(\varphi)\Leftrightarrow\lim Df_u(\varphi_n-\varphi)=\lim(Df_u(\varphi_n)-Df_u(\varphi))=0$であるから,$\lim\varphi_n\overset{\mathcal{D}}{=}0$

$\Rightarrow\lim f_u(\varphi_n)=0$, $\lim Df_u(\varphi_n)=0$を示せばよい.$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{supp}\,\varphi_n\subseteq K$となるコンパクト集合$K$をとると

$$\left|\lim\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\varphi_n(x)dx\right|\leq\lim\left(\int_K|u(x)|dx\cdot\sup_{x\in K}|\varphi_n(x)|\right)=\int_K|u(x)|dx\cdot\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K}|\varphi_n(x)|=0,$$

$$\left|\lim\left(-\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\varphi_n'(x)dx\right)\right|\leq\lim\left(\int_K|u(x)|dx\cdot\sup_{x\in K}|\varphi_n'(x)|\right)=\int_K|u(x)|dx\cdot\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K}|\varphi_n'(x)|=0.$$

対応$u\longleftrightarrow f_u$, $Du\longleftrightarrow f_u$は単射であるから,$u\in L^1_{loc}(R^1)$(あるいは$Du\in L^1_{loc}(R^1)$)と$f_u\in\mathcal{D}^*$(あるいは$Df_u\in\mathcal{D}^*$)を同一視すると$u\in\mathcal{D}^*$(あるいは$Du\in\mathcal{D}^*$)とみなせて$L^1_{loc}(R^1)\subset\mathcal{D}^*$を得る.「distribution」を「超関数」と意訳する理由は$L^1_{loc}(R^1)\subset\mathcal{D}^*$であるからであろう.そして$Df_u$を$f_u$の微分,$\delta$を$\delta:\mathcal{D}\ni\varphi\longmapsto\varphi(x_0)\in\mathbb{C}$と考えるのである.