闇空間 $\mathbb{R}$ の性質

@alg_d

※この講演は個人の主観が強く反映されているおそれがあります．

$\mathbb{R}$ で実数全体がなす集合を表します．これは皆さんよく慣れ親しんだ集合であって，様々な性質を知っていると思います．しかし，慣れ親しんでいるからといって，その性質が「良い」ものであると思いこんではいないでしょうか? 実は，$\mathbb{R}$ の良く知られた性質のうち，様々なものが「異常」な性質であることが知られています．本講演の目的は，これらの「異常」な性質を紹介し，実数が作り出す空間 $\mathbb{R}$ が闇の空間であることを認識してもらうことです．

私は，$\mathbb{R}$ の持つ性質は大きく分けて二つあると思っています。一つは整数論的性質で，もう一つは集合論的性質です．そこで，この講演でもこの二つの観点から $\mathbb{R}$ について見ていこうと思います．

整数論的性質というのは，$\mathbb{R}$ を「$\mathbb{Q}$ の完備化の一つ」と考えたときの性質のことです．$\mathbb{Q}$ の完備化は本質的に可算無限個あることが知られており，$\mathbb{R}$ はそのうちの一つです．が，$\mathbb{R}$ が持つ性質の多くはこの可算無限個の中で $\mathbb{R}$ だけが持つ性質なのです．この意味で，$\mathbb{R}$ は「異常」であると言えるでしょう．

集合論的性質というのは，濃度のことです．連続体仮説と呼ばれる命題がありますが，これは「実数がどのくらいあるのか」について述べている命題です．実は，この連続体仮説は（ある意味で）証明も反証もできないことが知られています．つまり，「実数がどのくらいあるのか」というのはよく分からないのです（実数については良く知っているような気がするにもかかわらず）．この事実について詳しく見ることにより，$\mathbb{R}$ がどんなに恐ろしい闇空間か分かってもらおうと思います．

以上が講演内容となります．予備知識としては，距離空間の Cauchy 列を使った完備化ができる程度を仮定しようと思っています．上で書いている「$\mathbb{R}$ のよく知られた性質」については（証明はともかく）必要に応じて説明します．