代数学における選択公理

@alg_d

代数学において，選択公理は無くてはならないものである．これは良く知られている事実です．何故ならば「環の極大イデアルが存在する」「線型空間の基底が存在する」という，選択公理と同値な有名な定理があるからです．しかし，代数学にはまだまだ選択公理に関するヤバい事実が存在するのです．本講演では，代数学の知識をある程度†仮定して以下の論文の解説を行います．これらは「代数学における選択公理」に関するヤバい論文トップ 3(と勝手に私が思っているもの) です．

[1] Wilfrid Hodges, ”Six Impossible Rings,” Journal of Algebra 31 (1974), 218–244
ZFC では存在できないとよく知られている環を 6 つ《構成》したという論文です (正確に言えば，そのような環が存在する ZF のモデルを構成したということです)．例えば「イデアルの無限上昇列を持たないが有限生成でないイデアルを持つ環」など．

[2] Andreas Blass, ”Injectivity, projectivity, and the axiom of choice,” Trans. Amer. Math. Soc. 255 (1979), 31–59
Injectivity(入射的)・Projectivity(射影的) はコホモロジーなどで重要な役割をする性質ですが，このような性質と選択公理が深い関係を持つという論文です．

[3] Wilfrid Hodges, ”Läuchli’s algebraic closure of Q,” Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79 (1976), 289–297
体の代数閉包の存在や一意性の証明に選択公理が使われることはそれなりに知られている事実ですが，有理数体の代数閉包だけを考えても選択公理は重要な働きをします．またこの論文では「PID $\Longrightarrow$ UFD」が ZF で証明できないことを示しています．

† 具体的には環論・体論にある程度馴染みがあることを仮定します．具体的には Noether 環の性質，入射的・射影的加群の定義，代数閉包の存在や一意性，などでしょうか．色々な話をする予定なので全てを知っている必要はないです．